

## חיפוש מספרים ראשוניים, הנפה של ארטוסתנס

- 1 א. כתבו חמישה מספרים ראשוניים. תארו את הדרך שבעזרתה מצאתם את המספרים.  
ב. האם 1 הוא מספר ראשוני? הסבירו.

**תזכורת** מספר ראשוני הוא מספר טבעי שמתחלק בדיוק בשני מספרים: ב-1 ובעצמו.

דוגמאות: המספרים 7 ו-23 הם מספרים ראשוניים.

\*\*\*

מתמטיקאים, פילוסופים ומדענים חוקרים את המספרים הראשוניים מזה אלפי שנים, אך רבים מסודותיהם של מספרים אלה עדיין לא פוענחו. ביחידה זו תמצאו כמה שאלות פתוחות – שאלות שעדיין לא נפתרו – על המספרים הראשוניים. אתם מוזמנים לנסות את כוחכם!

\*\*\*

כיצד מוצאים מספרים ראשוניים? החכם היווני אֶרְטוֹסְתֶנְס הציע דרך פשוטה למציאת מספרים ראשוניים, שנקראת **הנפה של ארטוסתנס**.

- 2 במשימה זו תשתמשו בנפה של ארטוסתנס למציאת כל המספרים הראשוניים עד 100. השתמשו ברשימת כל המספרים השלמים מ-2 עד 100:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

- א. שלב 1 – המספר הקטן ביותר ברשימה הוא 2, שהוא מספר ראשוני. השאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.  
שלב 2 – המספר הבא בראש הרשימה הוא 3, וגם הוא ראשוני. השאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.

- ב. • מהו המספר הבא בראש הרשימה, שאת כפולותיו יש למחוק? האם הוא ראשוני או פריק?
- האם אחרי כל שלב בתהליך יופיע בראש הרשימה מספר ראשוני? הסבירו.
- שערו: לאחר שתמחקו את הכפולות של המספר הבא – מה יהיה המספר הפריק הראשון ברשימה שעדיין לא נמחק?
- ג. שערו עד איזה מספר ראשוני תצטרכו להמשיך את התהליך. נמקו את השערתכם.
- המשיכו את התהליך ובדקו את השערתכם.
- ד. כתבו את כל המספרים הראשוניים עד 100.
- כמה מספרים ראשוניים עד 100 מצאתם?



### היצעתי?

אַרְטוֹסְתֵנִס (194–276 לפנה"ס) – מתמטיקאי, משורר, אתלט (בצעירותו), גאוגרף ואסטרונום יווני. בני זמנו כינוהו בְּתָא (האות השנייה באלפבית היווני), כיוון שהוכיח את עצמו כשני־הטוב־ביותר בתחומים רבים. הוא היה היווני הראשון שחישב (בדיוק רב!) את היקף כדור הארץ, והוא שהגה את המערכת הגאוגרפית של קווי אורך ורוחב.

- 3**
- א. כמה מספרים ראשוניים יש בין 1 ל-10? בין 11 ל-20? בין 21 ל-30? בדקו כמה ראשוניים יש בכל עשרת עד 100.
  - ב. באיזו שורה בטבלה שבמשימה 2 יש הכי הרבה מספרים ראשוניים?
  - ג. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים יש חמישה מספרים ראשוניים או יותר? הסבירו.
  - ד. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים אין בכלל מספרים ראשוניים? הסבירו.
  - ה. שערו: האם במאה השנייה של המספרים (כלומר המספרים מ-101 עד 200) יש יותר ראשוניים מאשר במאה הראשונה, או פחות? בדקו את השערתכם.

- 4**
- נכון או לא נכון? הסבירו.
  - א. בין המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.
  - ב. בין המספרים הטבעיים מ-100 עד 200 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.
  - ג. בכל קבוצה של מספרים טבעיים עוקבים יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.

5

ידוע כי 53087,8861 ו-2502559 הם מספרים ראשוניים.  
 א. כתבו בעזרתם ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו תתחלק בשלושתם.  
 ב. כתבו בעזרת שלושת המספרים ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו לא תתחלק באף אחד מהם.  
 ג. באתר The primes Pages תוכלו למצוא רשימה\* של 50,000,000 המספרים הראשוניים הקטנים ביותר (מ-2 עד 982,451,653). האם קיים מספר שאינו מתחלק באף אחד מהם? הסבירו.

6

כאשר בודקים את רשימות הראשוניים, מוצאים כי ככל שהמספרים גדלים – תדירות הופעת המספרים הראשוניים יורדת. האם הם "ייגמרו"? כלומר, האם יש מספר ראשוני אחרון – כזה שלא קיים מספר ראשוני גדול ממנו? נמקו.

נכון לתמוז תשע"א, המספר הראשוני הגדול ביותר הידוע הוא  $2^{43,112,609} - 1$ . זהו מספר בעל 12,978,189 ספרות. המספר התגלה במסגרת פרויקט GIMPS – פרויקט שיתופי ברשת, המגייס את כוחם של עשרות אלפי מחשבים ברחבי העולם בחיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים. אם אתם רוצים לשתף את המחשב הביתי שלכם בפרויקט (ואולי לגלות את המספר הראשוני הגדול ביותר הבא...) אתם יכולים להצטרף דרך האתר: <http://www.mersenne.org>

## הפרשים בין מספרים ראשוניים, מספרים ראשוניים תאומים

7

א. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 1? כמה זוגות כאלו קיימים? נמקו.  
 ב. מצאו זוג ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 11. האם יש עוד זוגות כאלו? נמקו.  
 ג. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 13? נמקו.

**הצגה** זוג מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 נקראים **ראשוניים תאומים**.

8

א. מצאו 5 זוגות של ראשוניים תאומים.  
 ב. לכל זוג ראשוניים תאומים שמצאתם, רשמו את המספר הנמצא ביניהם. האם יש תכונה משותפת ל"מספרי האמצע" שמצאתם? הסבירו.  
 ג. השלשה 2, 3, 5 היא שלשה של מספרים ראשוניים רצופים המכילה זוג של ראשוניים תאומים: 3, 5. נסו למצוא שלשות של מספרים ראשוניים רצופים שמכילות שני זוגות של ראשוניים תאומים. כמה שלשות כאלה קיימות? האם תוכלו להסביר מדוע?

**אה פתחה** מתמטיקאים לא מצאו עדיין הוכחה (או הפרכה) להשערה שיש אינסוף זוגות של ראשוניים תאומים.

\* לרשימת 50,000,000 הראשוניים הקטנים ביותר: <http://primes.utm.edu/lists/small/millions>

הניסיון מראה שאפשר לכתוב כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים. למשל:

$$2 = 5 - 3, \quad 4 = 7 - 3, \quad 6 = 11 - 5, \quad 72 = 83 - 11$$

וכן הלאה.

רשמו כל אחד מהמספרים שלפניכם כהפרש של שני מספרים ראשוניים:

12, 34, 56, 88, 100

חפשו כמה שיותר אפשרויות שונות לאותו המספר.

### אלות פתוחות

הנה שתי טענות שעדיין לא נמצאה להן הוכחה (וגם לא הפרכה):

- ניתן לרשום כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים.
  - ניתן לרשום כל מספר זוגי (גדול מ-2) כסכום של שני מספרים ראשוניים.
- הטענה האחרונה מכונה **השערת גולדבך**, והיא אחת השאלות הפתוחות הקדומות ביותר במתמטיקה.

## בדיקת ראשוניות

אחת הדרכים לבדיקת ראשוניות נקראת **מבחן החלוקה**: כדי להבטיח שמספר הוא ראשוני, יש לוודא שאינו מתחלק בשום מספר ראשוני הקטן או שווה לשורש שלו.

על מנת לוודא ש-701 הוא מספר ראשוני, עלינו לוודא שהוא אינו מתחלק באף אחד מהראשוניים הקטנים מ- $\sqrt{701} = 26.476\dots$ , כלומר במספרים: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ו-23.

### ביאנה

א. לפניכם רשימה של מספרים תלת-ספרתיים:

176, 235, 377, 443, 469, 611, 723, 845, 999

מצאו בעזרת מבחן החלוקה אילו מהמספרים ברשימה הם ראשוניים.

ב. לפי מבחן החלוקה, על מנת לוודא שמספר הוא ראשוני יש לנסות לחלק אותו רק במספרים

ראשוניים. מדוע אין צורך לבדוק חלוקה במספרים פריקים?

ג. לפי מבחן החלוקה אין צורך לבדוק חלוקה בראשוניים הגדולים משורש המספר. הסבירו מדוע.

יש אפשרויות שונות לפרק מספר טבעי לגורמים.

את המספר 24 אפשר לפרק כך:  $24 = 6 \cdot 4$  וגם כך:  $24 = 3 \cdot 8$

### ביאנה

ובכמה דרכים שונות אפשר לפרק מספר **לגורמים ראשוניים**? (שימו לב: שינוי בסדר הגורמים

אינו נחשב פירוק שונה;  $6 = 3 \cdot 2$  ו- $6 = 2 \cdot 3$  הם אותו פירוק של 6.)

המתמטיקאי היווני אוקלידס (שחי בערך בשנים 365–275 לפנה"ס) הוכיח משפט הקובע

שיש בדיוק דרך אחת לעשות זאת. המשפט הזה נקרא **המשפט היסודי של האריתמטיקה**.

ד. פרקו לגורמים ראשוניים כל מספר פריק מהרשימה בסעיף א.