

סדרת פיבונצ'י

פעילות א: סדרות וחוקיות

- בכל סעיף נתונים 4 האיברים הראשונים של סדרת מספרים. לכל סדרה:
- (1) כתבו את שני המספרים הבאים בסדרה. הסבירו כיצד מצאתם אותם.
 - (2) כתבו את האיבר העשירי ואת האיבר ה-120 בסדרה. הסבירו כיצד מצאתם אותם.
 - (3) **דין** תארו במילים או באמצעות ביטוי מתמטי:
- את הכלל שלפיו מוצאים את האיבר הבא בסדרה כשידועים האיברים שלפניו.
 - את הכלל למציאת האיבר שנמצא במקום ה-n בסדרה.

א. 2, 22, 222, 2222...

ב. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

ג. 100, 50, 0, -50...

ד. -0.2, 0.2, 0.6, 1...

ה. -1, 1, -1, 1, -1, 1...

ו. 1, -2, 3, -4 ...

ז. 4, 4, 4, 4...

ח. 2, 0, 2, 0...

ט. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$

י. 1, -2, 4, -8 ...

יא. 2, 3, 5, 7 ...

(4) האם בכל הסדרות הצלחתם לתאר את שני הכללים? הסבירו.

יש שיטות שונות לתאר את החוקיות של סדרת מספרים. הנה שתיים מהשיטות:
תיאור לפי איבר קודם: כלל או נוסחה למציאת כל איבר לפי האיברים שלפניו.
תיאור לפי המקום בסדרה: כלל או נוסחה למציאת כל איבר בסדרה רק לפי מקומו בסדרה (כלומר מציאת האיבר שבמקום ה-n רק לפי n).

דוגמה נתאר את החוקיות של הסדרה: 3, 6, 9, 12, 15...

תיאור לפי איבר קודם: כל איבר גדול מקודמו ב-3;

a	a+3
---	-----

אפשר לתאר זאת באמצעות התבנית:

תיאור לפי המקום בסדרה: האיבר במקום ה-n הוא $3n$.

פעילות ב: בונים סדרות

בכל סעיף בנו סדרה מתאימה - כתבו את עשרת המספרים הראשונים בסדרה. ציינו אם איברי הסדרה מתוארים לפי האיברים הקודמים או על פי המקום שלהם בסדרה או בדרך אחרת.

נסו לבנות סדרה מתאימה נוספת. אם אי-אפשר - הסבירו מדוע.

א. כל מספר בסדרה קטן מקודמו פי 2.

ב.

b	$b-2$
-----	-------

ג. האיבר הראשון בסדרה הוא 8-, וכל איבר בסדרה גדול מקודמו ב-2.

ד. החל מהאיבר השלישי בסדרה, כל איבר הוא סכום של שני האיברים הקודמים לו.

ה. האיבר במקום ה- n הוא n^2 .

ו. כל איבר בסדרה הוא מספר אי-זוגי.

ז. בכל מקום אי-זוגי בסדרה מופיע המספר 1, ובכל מקום זוגי - מספר השווה לסכום של כל

האיברים הקודמים.

ח. האיבר הראשון בסדרה הוא 3. מהאיבר השני ואילך כל איבר הוא שליש מהריבוע של האיבר

הקודם.

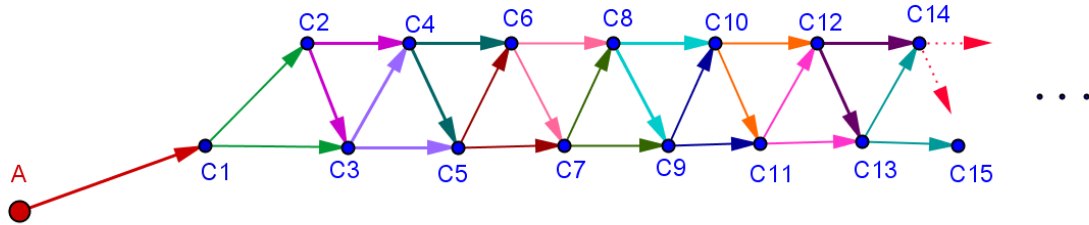
כל כלל המתאר איברים של סדרה לפי האיברים הקודמים יכול לתאר סדרות רבות ושונות. כדי לתאר סדרה אחת מסוימת באמצעות כלל כזה - יש לציין בפירוש את האיבר הראשון (או האיברים הראשונים) בסדרה.

פעילות ג: חידות וסדרות

חידה 1: כמה ארנבות?

- ביום בהיר נולדו זוג ארנבים (זכר ונקבה). החל מגיל חודשיים הם מולידים בכל חודש זוג נוסף של ארנבים (תמיד זכר ונקבה). כל זוג ארנבים צעירים שנולד במשפחת הארנבים מוליד צאצאים באותו אופן: החל מגיל חודשיים, בכל חודש זוג נוסף, תמיד זכר ונקבה. ננסה לברר כיצד מתרבה משפחת הארנבים הזו.
- א. ארגנו את הנתונים בדרך שתאפשר לכם למצוא כמה זוגות של ארנבים היו במשפחת הארנבים בכל חודש במשך השנה הראשונה. (הניחו שאף זוג ארנבים לא מת).
- ב. כתבו סדרת מספרים המתארת את מספר הארנבים במשפחה בכל חודש. תארו את החוקיות של הסדרה.
- ג. הסבירו מדוע החוקיות שמצאתם תתאים גם לחישוב מספר הארנבים בחודש ה-13 ובחודש ה-18 לאחר הולדתו של הזוג הראשון.

חידה 2: בכמה דרכים ניתן להגיע? (באדיבות דר' רוזה לייקין)



במדינת ויקטוריה יש מערכת כבישים בין עירוניים חד-סטריים מיוחדים במינם: מהעיר A היא עיר הבירה של המדינה.

מהעיר A ניתן לנסוע בכביש ישיר רק לעיר C_1 ,
מ- C_1 ניתן לנסוע בכביש ישיר ל- C_2 או ל- C_3 ,
מ- C_2 ניתן לנסוע בכביש ישיר ל- C_3 או ל- C_4
וכך הלאה.

נספור בכמה דרכים ניתן להגיע מהבירה A לכל עיר:

מ-A ל- C_1 ניתן להגיע בדרך אחת בלבד: $A \rightarrow C_1$

גם מ-A ל- C_2 ניתן להגיע בדרך אחת בלבד: $A \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$.

מ-A ל- C_3 ניתן להגיע בשתי דרכים: $A \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ או $A \rightarrow C_1 \rightarrow C_3$.

א. בכמה דרכים ניתן להגיע מ-A ל- C_4 ? מ-A ל- C_5 ?

ב. השלימו את הטבלה.

ג. רשמו את המספרים שמצאתם כסדרה

ותארו את חוקיות הסדרה.

ד. באיזו דרך תיאור בחרתם: בתיאור האיבר הכללי לפי מקומו

בסדרה, בתיאור איבר לפי האיברים שלפניו

או בדרך אחרת?

מספר הדרכים להגיע	מעיר הבירה A
	ל- C_1
	ל- C_2
	ל- C_3
	ל- C_4
	ל- C_5
	ל- C_6
	ל- C_7
	ל- C_8

חידה 3: עולים במדרגות

כשאני עולה במדרגות אני עולה בכל צעד מדרגה אחת, או שאני מדלגת על מדרגה ועולה שתיים בבת אחת. כך למדרגה הראשונה אני יכולה להגיע רק בדרך אחת, למדרגה השנייה אני יכולה להגיע בשתי דרכים שונות ולמדרגה השלישית אני יכולה להגיע בשלוש שונים דרכים שונות.

א. בהנחה שאני תמיד עולה, כתבו סדרת מספרים שתתאר בכמה דרכים אני יכולה להגיע לכל מדרגה.

ב. תארו את חוקיות הסדרה.

באיזו דרך תיאור בחרתם: בתיאור האיבר הכללי לפי מקומו בסדרה, בתיאור איבר לפי האיברים שלפניו או בדרך אחרת?

חידה 4: שורת כרטיסים

לשיר יש כרטיסים מלבניים במידות 2 ס"מ x 1 ס"מ.

שיר מסדרת את הכרטיסים בשורה שהולכת ומתארכת. כל כרטיס צמוד לקודמו ומסודר בהמשך השורה לאורך או לרוחב. כך היא יכולה להאריך את השורה בכל פעם בסנטימטר אחד או ב-2 ס"מ.

א. בכמה אופנים יכולה שיר ליצור שורה שאורכה 1 ס"מ?

בכמה אופנים יכולה שיר ליצור שורה שאורכה 2 ס"מ?

בכמה אופנים היא יכולה ליצור שורה שאורכה 3 ס"מ? 4 ס"מ?

ב. רשמו סדרת מספרים מתאימה עד למקום העשירי ותארו את חוקיות הסדרה.

האם החוקיות שמצאתם תתאים גם לחישוב מספר הדרכים שבהן שיר יכולה ליצור

שורה שאורכה 20 ס"מ? 25 ס"מ? נמקו.

שאלות לדיון בארבע החידות

- מה משותף לסדרות שמצאתם בארבע החידות?
- במה הסדרות שונות זו מזו?
- אילו מהחידות מתארות מצבים שיכולים להתרחש במציאות ואילו מהן מתארות מצבים דמיוניים? הסבירו.

סדרת המספרים 1, 1, 2, 3, 5, 8... נקראת **סדרת פיבונצ'י**, על שם המתמטיקאי האיטלקי **לאונרדו פיזנו (כלומר בן העיר פיזה)** הידוע כיום בכינויו **פיבונצ'י**. הסדרה אמנם הייתה מוכרת גם בתקופות קדומות לימיו של פיבונצ'י, אך פיבונצ'י הוא זה שהבחין בחשיבותה והחל לחקור אותה באופן מסודר. בשנת 1202 פרסם פיבונצ'י את ספרו "ספר החשבונייה", שבו הציג בין היתר את החידה העוסקת בזוגות הארנבים ואת תכונות הסדרה.

סדרת פיבונצ'י היא הסדרה המקיימת את שלושת התנאים האלה:

- האיבר הראשון בסדרה הוא 1.
- האיבר השני בסדרה הוא 1.
- מהאיבר השלישי ואילך כל איבר הוא הסכום של שני האיברים הקודמים לו.

מצאו את 20 האיברים הראשונים בסדרת פיבונצ'י.

תוכלו לבדוק את תשובתכם ולמצוא מספרי פיבונצ'י נוספים [ביישומון הזה](#).

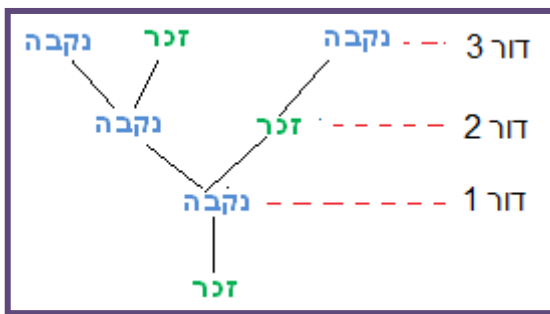
הסבר לשימוש בכלי

בקישור הנתון תמצאו טבלה שבה תוכלו לסמן איזה חלק של סדרת פיבונצ'י ברצונכם לראות. לדוגמה, כדי לראות את מספרי פיבונצ'י מהמקום ה-1 עד המקום ה-50 סמנו בטבלה בעמודה האמצעית את המספרים 1 ו-50, ואחר כך הקישו על הלחצן המודגש כאן בירוק:

Series?	Value or Range for i?	Action buttons
<input checked="" type="radio"/> Fibonacci <input type="radio"/> Approximate <input type="radio"/> Lucas <input checked="" type="radio"/> Exact	From i= <input type="text" value="1"/> To i= <input type="text" value="50"/>	<input type="button" value="Show series"/> <input type="button" value="Initial digits"/> <input type="button" value="Amase me!"/>
<input type="radio"/> Rabbit		
<input type="radio"/> Eval: <input type="text"/>		

פעילות ד: סדרת פיבונצ'י במציאות

העיסוק המתמטי בסדרת פיבונצ'י החל מהחידה הבלתי-מציאותית על זוגות השפנים המתרבים בזוגות, בקצב קבוע ובלי למות אף פעם... אך למרבה הפלא התברר ברבות השנים שהסדרה מיטיבה לתאר גם כמה וכמה מצבים אמיתיים בתחומים שונים של הטבע. התהליך הזה אופייני למחקר המתמטי: לא פעם המחקר מתחיל מתיאור מצב בלתי מציאותי לחלוטין, שמיועד רק לסייע בהצגת שאלה מתמטית מעניינת; אך לאחר זמן והתקדמות במחקר מתברר שהתיאור מתאים לתופעות טבע כאלה ואחרות, והמחקר המתמטי סביב השאלה אף מסייע בחקר התופעות.



1. זכר של דבורים בוקע מביצה בלתי מופרית, ולכן יש לו רק אם ואין לו אב; ואילו דבורה ממין נקבה מתפתחת מביצה מופרית ולכן יש לה גם אם וגם אב.

לפניכם אילן יוחסין של דבורה ממין זכר. אילן היוחסין מסודר מלמטה כלפי מעלה: בשורה

התחתונה מופיע הזכר עצמו, ובשורות שמעליו מוצגים הזכרים והנקבות מהדורות הקודמים שהיו מעורבים בהולדתו של הזכר.

א. המשיכו את אילן היוחסין (כלפי מעלה) עד ל-10 דורות לפני הזכר המתואר.

ב. השלימו את הטבלה הבאה לפי אילן היוחסין שבניתם.

מספר ההורים הכולל	מספר הנקבות	מספר הזכרים	מספר הדור הקודם לזכר
1	1	0	1
2	1	1	2







ג. קיבלתם שלוש סדרות של מספרים: מספר הזכרים בכל דור, מספר הנקבות בכל דור,

מספר ההורים הכולל בכל דור. מה מאפיין את הסדרות? הסבירו.

ד. שערו מהו מספר הנקבות באילן היוחסין של הזכר בדור ההורים ה-11. נמקו את

השערתכם.

2. יש הטוענים שברוב הפרחים בעולם מספר עלי הכותרת הוא מספר מתוך סדרת פיבונצ'י, וכי בפרחים המעטים שמספר עלי הכותרת שלהם איננו מספר מסדרת פיבונצ'י - המספר הוא סכום של שני מספרי פיבונצ'י.
א. בדקו באילו מהפרחים שבתמונות מספר עלי הכותרת הוא מספר פיבונצ'י. אם המספר איננו מספר פיבונצ'י - בדקו אם הוא סכום של שני מספרי פיבונצ'י.

<p>לוטוס</p> 	<p>היהודי הנודד</p> 	<p>סביון אביבי</p> 
<p>חרצית</p> 	<p>נורית אסיה</p> 	<p>בבונג דו-גוני</p> 

- א. בדקו את נכונות הטענה לגבי פרחים שונים בעזרת [רשימת הצמחים הזו](#).
- ב. נועם טוענת: אם מספר עלי הכותרת הוא סכום של שני מספרי פיבונצ'י – אין בכך שום דבר מעניין, כי כל מספר טבעי הוא סכום של שני מספרי פיבונצ'י. האם נועם צודקת? בדקו מספרים שונים ונסו לשער אם הטענה נכונה לכל מספר טבעי.
- ג. יש הטוענים שכל מספר טבעי הוא סכום של מספרי פיבונצ'י **שונים** (אבל לא דווקא שניים). האם הטענה נכונה? בדקו מספרים שונים ושערו אם הטענה נכונה לכל מספר טבעי.

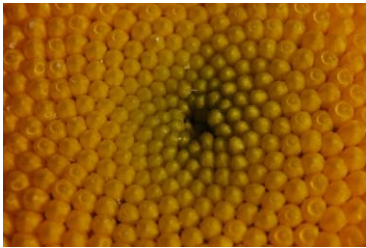
לבדיקת השערות שונות ניתן לשוב ולהיעזר [ביישומון](#).



3. בצמחים רבים בטבע הזרעים מסודרים בספירלות, חלקן בכיוון השעון וחלקן נגד כיוון השעון. יש הטוענים כי מספר הספירלות בכיוון השעון ומספר הספירלות נגד כיוון השעון (באותו צמח) הם תמיד שני מספרים עוקבים בסדרת פיבונצ'י.

א. היכנסו [לאתר זה](#) ובדקו אם הטענה נכונה עבור הצמחים

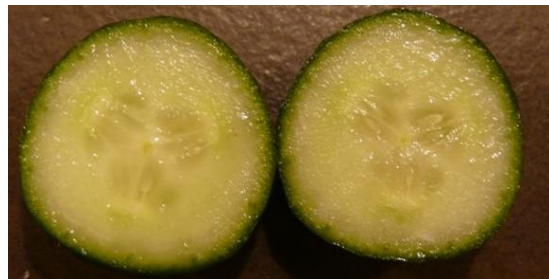
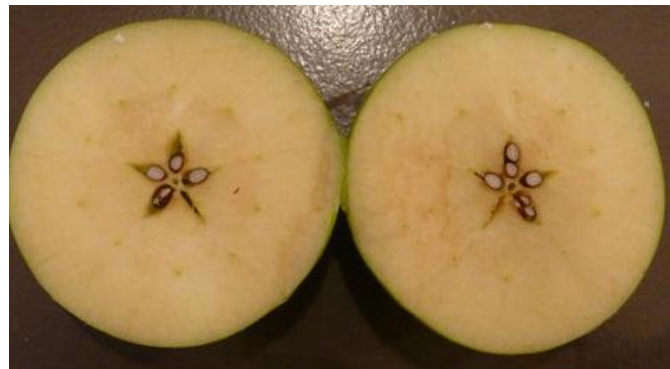
שבתמונות שלפניכם.



הדרכה: מצאו באתר את התמונות. ליד כל אחת מהן תמצאו כפתורים שונים. לחיצה על כפתור אחד תציג את הספירלות שבכיוון השעון, ולחיצה על כפתור אחר תציג את הספירלות שבכיוון ההפוך.

ב. מצאו צמחים משלכם (אצטרובל / פרח חמנית / ראש כרובית) ובדקו אם הטענה נכונה גם לגביהם.

4. א. בדקו כיצד מסודרים הגרעינים בפירות וברקות שבתמונות. האם הסידור קשור למספרי פיבונצ'י? הסבירו.



צילום: שוש גלעד

ב. חתכו פירות וירקות שונים לרוחבם ובדקו אם הגרעינים מסודרים בתוכם בחלוקות המתאימות למספרי פיבונצ'י.

5. מצאו דוגמאות נוספות של מספרי פיבונצ'י בטבע.

פעילות ה: מלבן פיבונצ'י וספירלת פיבונצ'י

1. הסתכלו בסדרת הריבועים שלפניכם.



הריבוע הראשון הוא ריבוע בגודל 1 ס"מ X 1 ס"מ

(הסרטוט מוקטן).

על צלע הריבוע הזה בונים ריבוע שני, וביחד מתקבל מלבן.

כך בכל שלב בונים ריבוע על הצלע הארוכה של המלבן

שהתקבל בשלב הקודם.

המלבנים המתקבלים נקראים **מלבני פיבונצ'י**.

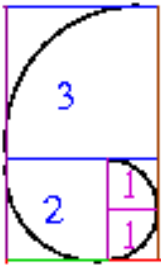
א. העתיקו את הסרטוט למחברת ובנו את שני הריבועים הבאים בסדרה.

ב. מצאו מה הקשר בין סדרה זו לסדרת פיבונצ'י.

ג. כתבו סדרה שתתאר את ההיקפים של הריבועים.

תארו את החוקיות של הסדרה שהתקבלה.

במה היא דומה לסדרת פיבונצ'י ובמה היא שונה ממנה?



2. נחזור לסרטוט שבמשימה הקודמת. בכל אחד מן הריבועים נסרטט רבע מעגל

המשיק לשתי צלעות סמוכות, כך שיתקבל קו רציף (ראו סרטוט). הספירלה

שקיבלנו נקראת **ספירלת פיבונצ'י**.

א. מה מייצגים המספרים שבתוך הריבועים בסרטוט?

ב. סרטטו את ספירלת פיבונצ'י במלבני פיבונצ'י שסרטטתם במשימה הקודמת.

ג. בנו סדרת מלבני פיבונצ'י כך שספירלת פיבונצ'י שתתקבל מהם תסתובב נגד

כיוון השעון.

בטבע אפשר למצוא ספירלות דומות לספירלת פיבונצ'י:



[cc-by-sa-3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/), Chris 73

[לצפייה בסרטון מומלץ בנושא לחצו כאן.](#)

פעילות ו: חוקרים את סדרת פיבונצ'י

1. לפניכם רביעיות של מספרים עוקבים מתוך סדרת פיבונצ'י. בכל סעיף השלימו את המקומות הריקים בתבנית (במספרים או בביטויים).

		233		610		א.
--	--	-----	--	-----	--	----

			144	233		ב.
--	--	--	-----	-----	--	----

		m	k			ד.
--	--	---	---	--	--	----

		a		b		ד.
--	--	---	--	---	--	----

		y	x			ה.
--	--	---	---	--	--	----

2. א. לפניכם שלוש טענות. בדקו כל טענה ושערו אם היא מתקיימת בסדרת פיבונצ'י כולה. הסבירו.

(1) כל מספר שלישי בסדרת פיבונצ'י הוא זוגי: . 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

(2) כל מספר רביעי בסדרת פיבונצ'י הוא כפולה של 3: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

(3) כל מספר חמישי בסדרת פיבונצ'י הוא כפולה של 5: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

ב. **יובל אומר** שאפשר להכליל את המסקנות מסעיף א ולהעלות את ההשערה:

כל מספר שישי בסדרת פיבונצ'י הוא כפולה של 6, כל מספר שביעי בסדרת פיבונצ'י הוא

כפולה של 7, כל איבר שמיני בסדרת פיבונצ'י הוא כפולה של 8 וכולי.

נורית טוענת שההשערה של יובל איננה מכלילה נכון את המסקנות.

לדעתה ההכללה היא כזו:

במקום **השישי** בסדרה עומד המספר 8. **כל איבר שישי** בסדרה מתחלק ב-8;

במקום **השביעי** בסדרה עומד המספר 13. **כל איבר שביעי** בסדרה מתחלק ב-13; וכולי.

והנה ניסוח כללי יותר: אם במקום ה-n מופיע האיבר a – אז בכל מקום שהוא כפולה של n

מופיע איבר שהוא כפולה של a.

(1) איזו מההשערות אכן מכלילה את מסקנות הסעיף הראשון?

(2) בדקו את **שתי ההשערות**. מהן מסקנותיכם?

3. בדקו את ההשערה: לשני איברים עוקבים בסדרת פיבונצ'י אין מחלקים משותפים גדולים מ-1.

4. מצאו קשרים משלכם בתוך סדרת פיבונצ'י ונסחו השערות מתאימות. בדקו את השערותיכם ונסו

להסביר מדוע הן נכונות.

לבדיקת השערות שונות ניתן לשוב ולהיעזר [ביישומון](#).

5. בכל סעיף נתונה סדרת תרגילים הקשורה למספרי פיבונצ'י.

לכל סדרה:

(1) כתבו את שלושת התרגילים הבאים בסדרה.

(2) נסו לנסח כלל מתאים ובדקו אם המספרים הבאים בסדרת פיבונצ'י מקיימים את הכלל.

א. $1^2 = 2 \cdot 1 - 1$

ב. $1^2 = 1 \cdot 1$

$2^2 = 3 \cdot 1 + 1$

$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$

$3^2 = 5 \cdot 2 - 1$

$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$

$5^2 = 8 \cdot 3 + 1$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$

$1^2 + 1^2 =$

6. לפניכם סדרת תרגילים לא פתורים.

$1^2 + 2^2 =$

א. כתבו את שני התרגילים הבאים

$2^2 + 3^2 =$

בסדרה ופתרו את כל התרגילים.

$3^2 + 5^2 =$

ב. מה תוכלו לומר על סדרת

הפתרונות? על הקשר בין

התרגילים לפתרונות?

נסחו השערה מתאימה ובדקו אם

היא מתקיימת גם בהמשך הסדרה.