

חשבון שאריות

עד היום הכרתם כמה קבוצות של מספרים: המספרים הטבעיים, השלמים והרציונליים. הכרתם את פעולות החשבון בקבוצות אלו ואת תכונותיהן של הפעולות השונות. בפעילות זו נכיר סוג אחר של קבוצות מספרים, שיש בהן מספר סופי של איברים: קבוצות של שאריות. נלמד כיצד מוגדרות בקבוצות האלו ארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק), ונבחן את תכונותיהן של הפעולות הללו.

לחשבון השאריות תפקידים רבים במתמטיקה ובטכנולוגיית המידע. הצפנים המשמשים היום להצפנת מידע – למשל לצורך ביצוע עיסקאות באינטרנט - מבוססים על חשבון שאריות של מספרים גדולים. חשבון השאריות מהווה גם בסיס להוכחת משפטים מתמטיים רבים, ביניהם [משפט פרמה הקטן](#) – אחד המשפטים הבסיסיים באלגברה ובתורת המספרים.

חשבון השאריות מודולו 7

דוגמה לחשבון שאריות כבר ראיתם בפעילות על שעון השנה: ימי השבוע מראשון עד שבת שקולים **לשאריות** המתקבלות מחילוק ב-7: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ו-0. החישוב שבאמצעותו מצאנו את ימי השבוע מדגים את חשבון השאריות **מודולו 7** (כלומר שאריות החילוק ב-7). דוגמאות:

- אם היום יום שישי, בעוד חמישה ימים יהיה יום רביעי. בחשבון מודולו 7 נכתוב:

$$6 +_7 5 = 4$$

- אם היום יום רביעי, לפני חמישה ימים היה יום שישי. בחשבון מודולו 7 נכתוב:

$$4 -_7 5 = 6$$

- אם היום יום שלישי, בעוד שישה ימים יהיה יום _____.

$$\text{_____} +_7 \text{_____} = \text{_____} \text{ נכתוב: } 7 \text{ מודולו}$$

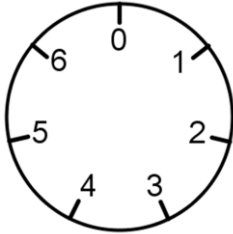
- אם היום יום שני, לפני שלושה ימים היה יום _____.

$$\text{_____} -_7 \text{_____} = \text{_____} \text{ : 7 מודולו}$$

שימו לב: את פעולות החיבור והחיסור מודולו 7 אנו מסמנים בסימנים $+_7$ ו- $-_7$, כדי להבדיל בין פעולות אלה לבין פעולות החיבור והחיסור ה"רגילות".

לצורך חשבון השאריות נוח להיעזר בשעון במקום ציר המספרים שנעזרנו בו בחשבון ה"רגיל".

שעון השאריות מודולו 7



נניח שאנו רוצים לחשב את הסכום של שתי השאריות 5 ו-4. כדי לעשות זאת בעזרת השעון נכוון את המחוג ל-5, ואז נקדם אותו ב-4 צעדים. המחוג יורה על תוצאת תרגיל החיבור.

• כיצד נחשב בעזרת השעון את ההפרש בין שתי שאריות?

משימה 1 – חיבור וחיסור בקבוצת השאריות מודולו 7

א. חשבו כל תרגיל פעמיים: פעם בחשבון ה"רגיל" ופעם בחשבון מודולו 7:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1) $2+3=$ ___ | $2+_7 3=$ ___ | 4) $4-3=$ ___ | $4-_7 3=$ ___ |
| 2) $5+6=$ ___ | $5+_7 6=$ ___ | 5) $4-6=$ ___ | $4-_7 6=$ ___ |
| 3) $4+3=$ ___ | $4+_7 3=$ ___ | 6) $2-5=$ ___ | $2-_7 5=$ ___ |

ב. מה הקשר בין תוצאות התרגילים שפתרתם בחשבון ה"רגיל" לבין התוצאות שלהם בחשבון מודולו 7? מדוע לדעתכם החשבון הזה נקרא "חשבון שאריות"?

$+_7$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

ג. השלימו את לוח החיבור מודולו 7:

ד. היעזרו בלוח החיבור לפתרון המשוואות:

$$1+_7 n=4 \quad 4+_7 n=1 \quad n+_7 6=2 \quad n+_7 5=5 \quad n-_7 5=5$$

משימה 2 - האיבר הנגדי

כזכור לכם, שני מספרים נקראים **מספרים נגדיים** אם סכומם הוא 0. לדוגמה,
 $4 + (-4) = 0$, לכן 4 ו-(-4) הם מספרים נגדיים.

נחיל אותה הגדרה גם על החשבון מודולו 7: גם כאן שני מספרים ייקראו **מספרים נגדיים** אם סכומם (מודולו 7!) הוא 0.

לדוגמה, הנגדי של 4 בחשבון שלנו הוא 3, כי $4 +_7 3 = 0$

א. מהו הנגדי של 5 בחשבון מודולו 7?

ב. השלימו:

$1 +_7 \underline{\quad} = 0$ $4 +_7 \underline{\quad} = 0$ $6 +_7 \underline{\quad} = 0$ $5 +_7 \underline{\quad} = 0$

ג. כתבו את הנגדי של כל שאריות:

6	5	4	3	2	1	0	שארית
							נגדי

עתה יש לנו עוד דרך לחסר שאריות: על ידי חיבור הנגדי.

לדוגמה: הנגדי של 5 הוא 2, לכן: $4 -_7 5 = 4 +_7 2 = 6$

ד. פתרו את תרגילי החיסור בשתי דרכים: על ידי צעידה לאחור על השעון, ועל ידי

חיבור הנגדי. ודאו שקיבלתם אותן תוצאות!

$1 -_7 3 = \underline{\quad}$ $4 -_7 2 = \underline{\quad}$ $6 -_7 6 = \underline{\quad}$ $5 -_7 0 = \underline{\quad}$

משימה 3 - לוח הכפל של השאריות מודולו 7

נגדיר כפל על השאריות כפי שהוא מוגדר על השלמים: חיבור חוזר של מספר לעצמו (אלא שהפעם זהו חיבור חוזר מודולו 7 כמובן!). דוגמאות:

$$3 \times_7 5 = 5 +_7 5 +_7 5 = 1 \qquad 5 \times_7 3 = 3 +_7 3 +_7 3 +_7 3 +_7 3 = \underline{\quad}$$

שימו לב שהגדרת הכפל תלויה בסדר האיברים במכפלה.

א. • חשבו את המכפלות:

$$\begin{array}{llll} 1) 5 \times_7 3 = & 3) 6 \times_7 4 = & 5) 4 \times_7 1 = & 7) 3 \times_7 0 = \\ 2) 3 \times_7 5 = & 4) 4 \times_7 6 = & 6) 1 \times_7 4 = & 8) 0 \times_7 3 = \end{array}$$

• דיון: האם חוק החילוף מתקיים בכפל מודולו 7? הסבירו מדוע.

ב. כתבו את לוח הכפל מודולו 7.

\times_7	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

ג. היעזרו בלוח הכפל לפתרון המשוואות. אם אין למשוואה פיתרון - הסבירו מדוע.

$$1 \times_7 n = 4 \qquad 4 \times_7 n = 1 \qquad n \times_7 0 = 5 \qquad n \times_7 5 = 0$$

בחשבון ה"רגיל" המספר ההופכי (או "המספר ההפוך") של 4 הוא $\frac{1}{4}$, כלומר "1 חלקי 4". דרך אחרת להגדיר מספרים הופכיים היא "שני מספרים שמכפלתם 1". הגדרה כזו מאפשרת לנו להגדיר את המספר ההופכי גם ללא הגדרה של פעולת החילוק. בהתאם להגדרה זו נגדיר את המספר ההופכי בחשבון מודולו 7.
לדוגמה: המספר ההופכי של 4 בחשבון מודולו 7 הוא 2, כי $4 \times_7 2 = 1$.

א. השלימו: $1 \times_7 \underline{\quad} = 1$ $2 \times_7 \underline{\quad} = 1$ $3 \times_7 \underline{\quad} = 1$

ב. כמה פתרונות יש למשוואה $5 \times_7 n = 1$?

כמה פתרונות יש למשוואה $0 \times_7 n = 1$?

ג. רשמו את המספר ההופכי של כל שארית. אם לא קיים מספר הופכי - ציינו זאת.

6	5	4	3	2	1	0	שארית
הופכי							

ד. בחשבון ה"רגיל" יש שני מספרים שכל אחד מהם הוא ההופכי של עצמו. מהם? גם בקבוצת השאריות מודולו 7 ישנם שני מספרים כאלה. מהם? מה הדמיון בין שני הזוגות שמצאתם?

בחשבון ה"רגיל", במקום לחלק במספר כלשהו אפשר לכפול במספר ההופכי:

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

את החילוק מודולו 7 נגדיר באופן דומה. לדוגמה, 2 הוא המספר ההופכי של 4, לכן חילוק ב-4 הוא כמו כפל ב-2:

$$5 \div_7 4 = 5 \times_7 2 = 3$$

ה. פתרו את תרגילי החילוק. אם אין פתרון לתרגיל - ציינו מדוע.

$$4 \div_7 2 = \quad 1 \div_7 6 = \quad 3 \div_7 4 = \quad 5 \div_7 0 = \quad 0 \div_7 2 =$$

ו. נתונה המשוואה $4 \times_7 n = 5 \times_7 n$. כמה פתרונות יש לה?

משימה 5 - חשבון שאריות בקבוצות מספרים נוספות

א. בקבוצת המספרים מודולו 2 ישנם שני איברים: 0 ו-1, שכן אלו כל השאריות שאפשר לקבל כאשר מחלקים מספר ב-2. רשמו את לוח החיבור ואת לוח הכפל מודולו 2.

$+_2$	0	1
0		
1		

\times_2	0	1
0		
1		

הקובץ [חשבון שאריות](#) מציג לוחות חיבור וכפל של קבוצות שונות של שאריות. במשבצת הכחולה רשום **המחלק** של הקבוצה (למשל 7 במקרה של קבוצת השאריות מודולו 7, או 2 במקרה של מודולו 2). לדוגמה, על מנת להציג את לוחות הפעולה מודולו 4, רשמו במשבצת הכחולה 4, והקישו Enter. בגיליון תראו את לוח הכפל מודולו 4. לחיצה על הלשונית "חיבור" בתחתית הגיליון תעביר אתכם ללוח החיבור מודולו 4.

ב. הציגו בגיליון את לוחות הפעולה מודולו 4. מצאו לכל שארית את המספר ההופכי ואת המספר הנגדי:

3	2	1	0	שארית
				נגדי
				הופכי

- האם לכל מספר בקבוצת השאריות מודולו 4 קיים מספר נגדי? הסבירו.
- האם לכל מספר בקבוצת השאריות מודולו 4 קיים מספר הופכי? הסבירו.

ג. עברו על הלוחות של כל קבוצות השאריות ממודולו 3 עד מודולו 10. בכל קבוצת שאריות בדקו לאילו מספרים אין מספר הופכי (אם יש מספרים כאלה). מה מאפיין את המספרים האלה?

ד. שערו לאילו מהשאריות בקבוצת מודולו 12 אין מספר הופכי. נסו לנמק מדוע.
בדקו את השערותיכם בעזרת הגיליון האלקטרוני.

ה. ענו ללא עזרת הגיליון: באילו מקבוצות השאריות ממדולו 4 עד מודולו 20 יש פתרון למשוואה $3 \times_7 n = 1$? הסבירו.

ו. בדקו בעזרת הגיליון: באילו מקבוצות השאריות יש יותר מפתרון אחד למשוואה $3 \times_7 n = 5 \times_7 n$? מה משותף לקבוצות אלו?