מספרים ממשיים

א. מספרים רציונליים

מה נלמד?

- מהו מספר רציונלי?
- כתיבת שבר פשוט כמספר עשרוני
- ייצוג מספר עשרוני מחזורי כשבר פשוט.

משבר פשוט למספר עשרוני

1. דיון מיינו את המספרים שברשימה לקבוצות.

$$2\ ,\ -3\ ,\ -9.5\ ,\ 7\ ,\ 100\ ,\ -4.3\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{5}\ ,\ 1.785\ ,\ 0\ ,\ -2.7\ ,\ 1\frac{3}{5}\ ,\ 1\ ,\ 1007\ ,\ -300$$

2. התייחסו למספרים במשימה 1 וקבעו:

- אילו מספרים שייכים לקבוצת המספרים השלמים החיוביים?
- אילו מספרים שייכים לקבוצת המספרים השלמים השליליים?
- אילו מספרים שייכים לקבוצת המספרים השלמים?
- אילו מספרים שייכים לקבוצת המספרים שניתן לרשום אותם כשבר פשוט ($\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$)?

קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצת כל המספרים השלמים החיוביים.

דוגמאות 1 , 245 , 123456987

קבוצת המספרים השלמים כוללת את כל המספרים החיוביים השלמים, כל המספרים השליליים השלמים והמספר 0.

דוגמאות 545454 , 0 , -1 , -98765

קבוצת המספרים הרציונליים כוללת את כל המספרים שניתן לרשום אותם כשבר פשוט $\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$, כאשר המונה והמכנה הם מספרים שלמים.

דוגמאות $\frac{232}{4}\ ,\ 3\frac{1}{15}\ ,\ 432\ ,\ -98\ ,\ 0\ ,\ \frac{-3}{4}\ ,\ 3.25$

3. האם המספרים האלה הם מספרים רציונליים? הסבירו.

$$\frac{7}{-8}\ ,\ -108\ ,\ 0\ ,\ 3.2\ ,\ -45.75$$

4. כתבו כל שבר פשוט כמספר עשרוני .

א) $\frac{7}{10}$ ב) $\frac{37}{100}$ ג) $\frac{2}{100}$ ד) $\frac{1053}{1000}$ ה) $\frac{153}{100}$ ו) $\frac{5}{10,000}$ ז) $\frac{215}{10}$

5. בכל סעיף נסו לכתוב את המספר הרציונלי כשבר שמכנהו הוא חזקה של 10.
אם הצלחתם, כתבו אותו גם כמספר עשרוני. אם לא הצלחתם - הסבירו מדוע .

א) $\frac{7}{50}$ ב) $\frac{5}{8}$ ג) $\frac{3}{40}$ ד) $\frac{7}{15}$ ה) $\frac{18}{45}$ ו) $\frac{14}{35}$

6. רות טוענת: "גם מספר שאינו ניתן לכתיבה כשבר שהמכנה שלו הוא חזקה של 10 - ניתן לכתיבה כמספר עשרוני."

7. מה דעתכם על טענתה של רות? אם אתם מסכימים אִתה - תנו דוגמה מתוך משימה 5: בחרו שבר אחד שלא הצלחתם לכתוב אותו עם מכנה שהוא חזקה של 10, והראו כיצד אפשר לכתוב אותו כמספר עשרוני.

שבילים למצוינות

מטח המרכז לטכנולוגיה חינוכית

8. דיון נתונים המספרים:

$\frac{14}{25}$ $\frac{2}{75}$ $\frac{9}{75}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{12}$

א. צמצמו כל שבר ככל שאפשר.

ב. אם אפשר, כתבו את השבר כשבר פשוט שמכנהו חזקה של 10.
אם אי-אפשר, הסבירו מדוע.

ג. פרקו לגורמים ראשוניים את המכנה של כל שבר מצומצם.

ד. נסו להכליל: כיצד ניתן לקבוע אם שבר מסוים ניתן לכתיבה כשבר שמכנהו הוא חזקה של 10?

כל שבר מצומצם שאת המכנה שלו אפשר להציג כמכפלות של הגורמים 2 או 5, אפשר להרחיב לשבר שהמכנה שלו הוא חזקה של 10. את השבר שמתקבל אפשר בקלות לכתוב כמספר עשרוני.

דוגמה נתון השבר: $\frac{21}{120}$

נצמצם את השבר ב-3 ונקבל: $\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$

המכנה 40 של השבר המצומצם הוא מכפלת הגורמים הראשוניים 2 ו-5:

$40=2\cdot2\cdot2\cdot5$

אם נרחיב את השבר $\frac{7}{40}$ במכפלה $5\cdot5$, יתקבל שבר שמכנהו הוא 10^3, כלומר 1000.

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{7\cdot5\cdot5}{\underbrace{2\cdot5}_{10}\cdot\underbrace{2\cdot5}_{10}\cdot\underbrace{2\cdot5}_{10}}=\frac{175}{1000}$$

עתה אפשר לכתוב בקלות את השבר $\frac{21}{120}$ כמספר עשרוני: $\frac{21}{120}=\frac{7}{40}=\frac{175}{1000}=0.175$

9. דיון נתונים השברים:

$\frac{13}{20}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{14}{35}$ $\frac{15}{12}$ $\frac{1}{80}$

א. באמצעות חילוק המונה במכנה (אפשר במחשבון) כתבו כל שבר כמספר עשרוני.

ב. סמנו את השברים שהצלחתם לכתוב כמספר עשרוני סופי, וסכמו מה מאפיין את המספרים האלה.

ג. כתבו את המספרים הרציונליים שלא הצלחתם לכתוב כמספר עשרוני סופי. סכמו מה מאפיין את המספרים האלה.

כל שבר אפשר לכתוב כמספר עשרוני על ידי חילוק המונה במכנה.
לפעמים מתקבל מספר עשרוני סופי ולפעמים מספר עשרוני אינסופי.

דוגמה 1 את השבר $\frac{3}{8}$ ניתן לכתוב כמספר עשרוני סופי: 0.375

דוגמה 2 את השבר $\frac{1}{3}$ לא ניתן לכתוב כמספר עשרוני סופי. המספר שמתקבל על ידי חילוק המונה במכנה הוא אינסופי: ...0.333.

10. נתונים המספרים הרציונליים: $\frac{17}{20}$, $\frac{5}{12}$

א. מבלי לחלק את המונה במכנה, שערו אם ניתן לכתוב את המספרים הרציונליים האלה כמספרים עשרוניים סופיים, והסבירו.
בדקו את תשובתכם על ידי חילוק המונה במכנה (אפשר במחשבון).

ב. כתבו שלושה מספרים רציונליים (משלכם) שניתן לכתוב אותם כמספרים עשרוניים סופיים.
בדקו את תשובתכם על ידי חילוק המונה במכנה.

ג. כתבו שלושה מספרים רציונליים שלא ניתן לרשום אותם כמספרים עשרוניים סופיים. בדקו את תשובתכם על ידי חילוק המונה במכנה.

11. דיון נתונים מספרים רציונליים:

$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{20}{34}$ $\frac{100}{37}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{25}{24}$

א. הסבירו מדוע אי-אפשר לכתוב אותם כמספרים עשרוניים סופיים.

ב. היעזרו בפעולת החילוק במחשבון וכתבו כל אחד מהמספרים כמספר עשרוני אינסופי .

ג. בדקו כל אחד מהמספרים העשרוניים שקיבלתם בסעיף **ב**: האם יש בו ספרה או קבוצת ספרות החוזרת על עצמה ברצף אין ספור פעמים? אם כן, סמנו את הספרה או את קבוצת הספרות..

מספר עשרוני מחזורי הוא מספר עשרוני אינסופי שבו ספרה כלשהי או קבוצת ספרות חוזרת על עצמה ברצף אין ספור פעמים. הספרה או קבוצת הספרות החוזרת על עצמה נקראת **המחזור** של המספר הזה.

דוגמה 1 $0.33333\ldots$ הוא מספר עשרוני מחזורי, שהמחזור שלו הוא הספרה 3. נוהגים לרשום את המספר כך: $0.\overline{3}$

דוגמה 2 $0.325555555\ldots$ הוא מספר עשרוני מחזורי שהמחזור שלו הוא הספרה 5. נוהגים לרשום את המספר כך: $0.32\overline{5}$. שימו לב: במקרה זה המחזור אינו מתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית.

דוגמה 3 $0.4751751751\ldots$ הוא מספר עשרוני מחזורי. המחזור של המספר הוא רצף הספרות 751.

נוהגים לכתוב את המספר העשרוני הזה כך: $0.4\overline{751}$. גם במקרה זה המחזור אינו מתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית.

21. יעל רשמה השערה: "כל מספר רציונלי שלא ניתן לכתיבה כמספר עשרוני סופי ניתן לכתיבה כמספר עשרוני מחזורי".

א. נסו למצוא דוגמה נגדית, שתפריך את ההשערה של יעל: חפשו מספר רציונלי שלא ניתן לכתוב אותו כמספר עשרוני סופי וגם לא כמספר עשרוני אינסופי.
בדקו אם צדקתם על ידי חילוק ארוך.

ב. אתגר האם אתם חושבים שההשערה של יעל נכונה? אם כן נסו לנמק מדוע היא נכונה.

כאשר כותבים מספר רציונלי כמספר עשרוני, יכול להתקבל שבר עשרוני **סופי** או שבר עשרוני **מחזורי**.
לא יכול להתקבל מספר עשרוני שהוא אינסופי ולא מחזורי. מספר עשרוני אינסופי שאינו מחזורי אינו מספר רציונלי.
מספר שאיננו רציונלי נקרא **מספר אי-רציונלי**.

31. נתון המספר העשרוני: $0.1010010001000010000001\ldots$
האם לדעתכם זהו מספר רציונלי? נמקו.

ממספר עשרוני לשבר פשוט

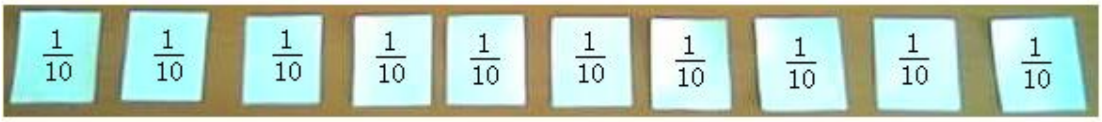
41. נתון המספר העשרוני המחזורי $0.\bar{1}$.
נסו למצוא שבר פשוט המייצג את המספר הזה.
בדקו את תשובתכם על ידי חילוק המונה במכנה.

51. דנה רצתה למצוא שבר פשוט שמתאים ל- $0.\bar{1}$. לשם כך היא כתבה :

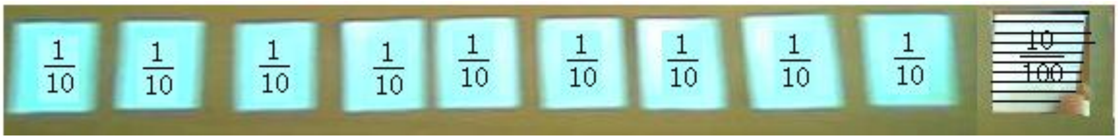
$$0.\bar{1}=0.11111...=0.1+0.01+0.001+0.0001+0.00001+0.000001=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+......$$

היא ניסתה לפרק את השלם לחלקים השווים למספר הזה.

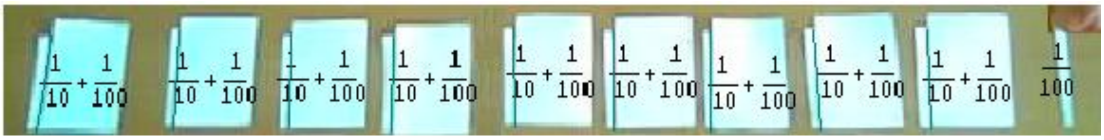
תחילה ביטאה את השלם כעשר עשיריות : $10\times\frac{1}{10}=1$



את אחת העשיריות המירה למאיות:



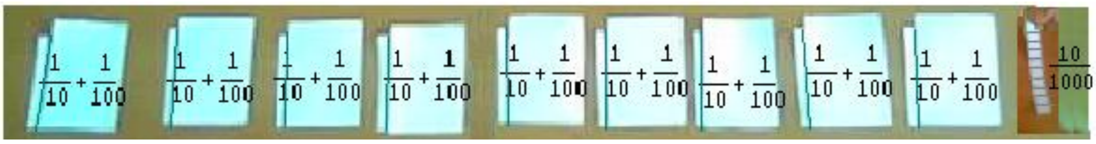
והוסיפה מאית לכל אחת מתשע העשיריות שנותרו :



כך הצליחה לבטא את השלם באמצעות 9 חלקים שווים שגודלם $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ ועוד חלק אחד בגודל $\frac{1}{100}$.

כלומר $9\times(\frac{1}{10}+\frac{1}{100})+\frac{1}{100}=1$

את המאית שנותרה היא הפכה לאלפיות :



והוסיפה אלפית לכל אחד מתשעת החלקים השווים :

כך הצליחה לבטא את השלם באמצעות 9 חלקים שווים שגודלם $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ ועוד חלק אחד בגודל $\frac{1}{1000}$.

כלומר

$$9\times(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000})+\frac{1}{1000}=1$$

א. המשיכו את התהליך של דנה עוד שתי שורות. בטאו את השלם באמצעות תשעה חלקים שווים ועוד חלק אחד.

ב. דיון האם לדעתכם התהליך שהציעה דנה הוא סופי?

ג. דנה טוענת: בהנחה שאמשיך את התהליך עוד ועוד, מותר לי לכתוב את השוויון:

$$9x(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}+...)=1$$

ולהסיק כי: $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}+...=\frac{1}{9}$

כלומר $0.1111.....=\frac{1}{9}$

מה דעתכם על טענתה של דנה?

ד. האם $\frac{1}{9}$ שווה ל $0.\bar{1}$? בדקו על ידי חילוק של המונה במכנה.

16. א. השלימו את הטבלה:

שבר שמכנהו 9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$			
שבר עשרוני				0.4444…	0.555555…	0.66666…

ב. נסו לשער על פי הממצאים בטבלה:

1. איזה שבר פשוט יכול לייצג את המספר 0.777…. ?
2. איזה שבר פשוט יכול לייצג את המספר 0.8888…. ?

בדקו את השערותיכם על ידי חילוק.

ג. דיון הם תוכלו להסיק מסקנה כללית מהסעיפים הקודמים?

ד. דיון איזה שבר יכול לייצג את המספר 0.9999…. ?

17. לפניכם מספרים עשרוניים מחזוריים, שהמחזורים שלהם אינם מתחילים מיד אחרי הנקודה העשרונית. רשמו את המספרים כשברים פשוטים.

דוגמה

$0.75333… = 0.75 + 0.00333… =$

$0.75 + 0.00333… = 0.75 + 0.333… : 100=$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}:100=\frac{3}{4}+\frac{1}{300}=\frac{225}{300}+\frac{1}{300}=\frac{226}{300}=\frac{113}{150}$$

א) 0.05555…　　ב) 0.00444…　　ג) 0.24444…　　ד) 0.25222…

א. השלימו את הטבלה:

שבר שמכנהו 99	$\frac{1}{99}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{3}{99}$			
שבר עשרוני				0.04040...	0.050505……	0.060606….

ב. על פי הממצאים בטבלה נסו לשער:

1. איזה שבר יכול לבטא את המספר העשרוני...0.070707 ?
2. איזה שבר יכול לייצג את המספר ...0.101010 ?
3. איזה שבר יכול לייצג את המספר ...0.121212 ?
4. איזה שבר יכול לייצג את המספר ...0.262626 ?

בדקו את השערותיכם על ידי חילוק המונה במכנה בכל שבר שקיבלתם.

ג. דיון הכלילו את ממצאיכם.

81. השלימו את הטבלה, בדקו על ידי חילוק אם השלמתם נכון, והכלילו את ממצאיכם.

שבר פשוט	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{999}$		
שבר עשרוני				0.00010001…..	0.0000100001………

91. מצאו שברים פשוטים המתאימים לשברים העשרוניים המחזוריים.
בדקו את תשובותיכם.

דוגמה

$$0.123123\ldots = 123 \cdot 0.001001\ldots =$$

$$123 \cdot \frac{1}{999} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

ה) 0.565656… ג) 0.989898… א) 0.008008…

ו*) $0.123123\ldots$ ד) 0.102102102 ב) $0.121212\ldots$

כל שבר עשרוני מחזורי שהמחזור שלו מתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית, ניתן לכתיבה כשבר פשוט **שמונהו שווה למחזור ומכנהו הוא 10^n-1** , כאשר n הוא אורך המחזור.

דוגמה 1 נחפש את השבר הפשוט המתאים לשבר העשרוני המחזורי: $0.545454\ldots$

המחזור של השבר הוא 54.

מספר הספרות במחזור הוא 2.

לכן השבר הפשוט המתאים ל-**$0.545454\ldots$** הוא: $\frac{54}{10^2-1}=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$

דוגמה 2 נחפש את השבר הפשוט המתאים לשבר העשרוני המחזורי: $0.9999\ldots$

המחזור של השבר הוא 9.

מספר הספרות במחזור הוא 1.

לכן השבר הפשוט המתאים הוא: $\frac{9}{10^1-1}=\frac{9}{9}=1$

דוגמה 3 נחפש את השבר הפשוט המתאים ללשבר העשרוני המחזורי: **$0.225225\ldots$**

המחזור של השבר הוא 225.

מספר הספרות במחזור הוא 3.

אם כך, השבר הפשוט המתאים ל-**$0.225225\ldots$** הוא: $\frac{225}{10^3-1}=\frac{225}{999}=\frac{29}{111}$

20. כתבו כל שבר עשרוני מחזורי כשבר פשוט.
בדקו את תשובותיכם על ידי חילוק.

ד*) $1.\overline{21}$ ג) $0.\overline{013}$ ב) $0.\overline{513}$ א) $0.\overline{98}$

21. הרחבה בכל סעיף מצאו שבר פשוט המתאים למספר העשרוני.

ג) $2.00\overline{327}$ ב) $0.0\overline{981}$ א) $0.0\overline{21}$

22. הרחבה בכל סעיף מצאו שבר פשוט המתאים למספר העשרוני.

ג) $0.012100010001000\ldots$ ב) $0.24\overline{139}$ א) $0.3125125125\ldots$

23. ערן חיפש שבר פשוט שמתאים לשבר העשרוני $0.\overline{54}$. הוא הציע פתרון כזה:

סימנתי את השבר הפשוט המתאים באות a: $a = 0.54545454...$

מכאן אפשר להסיק כי $100a = 54.54545454\ldots$

$$99a = 54$$

$$a = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$$

א. דיון בדקו והסבירו כל שלב בחישוב של ערן.

ב. השתמשו בשיטה של ערן לחישוב השבר הפשוט שמתאים לשבר העשרוניים:

(1) $0.\overline{72}$ (2) $0.\overline{725}$ הרחבה(3), $0.7\overline{25}$,

ג. כתבו שלושה שברים עשרוניים מחזוריים משלכם, ובדקו אם ניתן לכתוב אותם כשברים פשוטים בשיטה של ערן.

משימות לסיכום

42. א. הסבירו מדוע אי-אפשר להציג את המספר $\frac{35}{42}$ כמספר עשרוני סופי.

ב. הראו ללא שימוש במחשבון שאת המספר $\frac{141}{480}$ אפשר להציג כמספר עשרוני סופי.

52. א. הסבירו מהו מספר רציונלי.

ב. אתגר תנו דוגמה למספר עשרוני שהוא מספר רציונלי ודוגמה למספר עשרוני שאינו מספר רציונלי.

ג. האם כל מספר שלם הוא מספר רציונלי? נמקו.

62. כתבו את המספר $0.50131313\ldots$ כשבר פשוט.

ב. מספרים אי-רציונליים

מה נלמד?

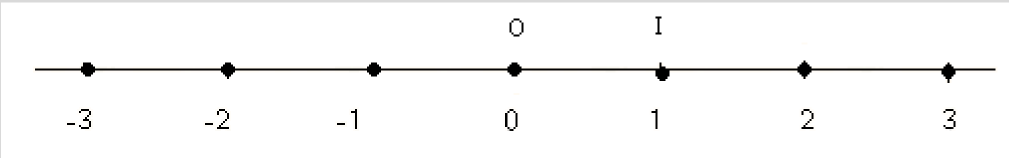
- מהו מספר אי-רציונלי?
- מהו מספר ממשי?

מזה דורות רבים מניחים המתמטיקאים שלכל **נקודה על ציר-המספרים** מתאים מספר, גם אם לא תמיד ידוע איך לתאר אותו.

לא קשה לתאר את המספרים הרציונליים בעזרת ציר-המספרים.

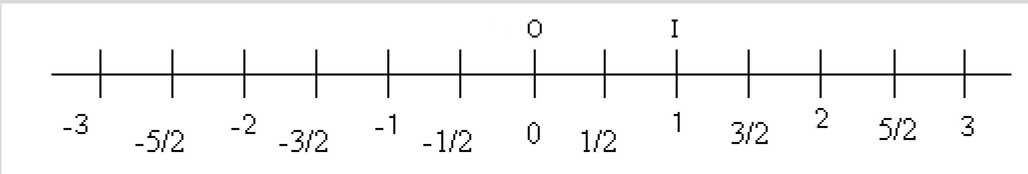
ניקח ישר כלשהו ונסמן עליו נקודת אפס O וקטע OI שאורכו מייצג יחידה אחת.

נייצג את כל המספרים **השלמים** - החיוביים והשליליים - כנקודות על הישר שמרוחקות זו מזו מרחק השווה לקטע OI (יחידה אחת):



כעת נסמן את כל השברים שהמכנה שלהם הוא 2, כלומר כל המספרים הרציונליים מהצורה $\frac{p}{2}$:

נחלק כל אחד מהמרווחים שנוצרו לשני קטעים שווי אורך. הנקודות המופיעות כעת על הציר (נקודות האמצע של הקטעים והנקודות שייצגו את השלמים) מייצגות את כל השברים מהצורה $\frac{p}{2}$:



הפיתגוראים - המתמטיקאים הקדמונים ביוון העתיקה ובראשם **פיתגורס** (נולד בשנת 570 לפנה"ס) - האמינו שלכל נקודה על ציר-המספרים ניתן להתאים מספר על ידי בחירה של מכנה מתאים q וחלוקה של כל מרווח ל-q קטעים שווים. במילים אחרות – הם האמינו שכל המספרים הם רציונליים!

האמונה הזו הפכה לסוג של דת.

1. סרטטו ציר-מספרים והציעו דרך לסמן עליו את המספרים הרציונליים הבאים :

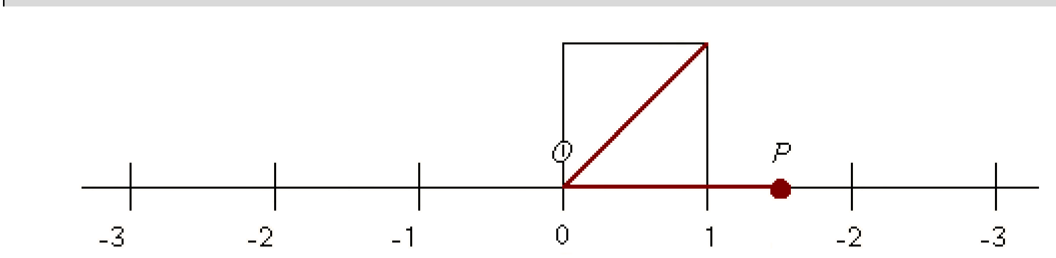
$$\frac{8}{3}\ ,\ -3\ ,\ -1.5\ ,\ 0.2,\quad 0.\overline{4}\ ,\ 0.21\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ -\frac{3}{8}\ ,\ \frac{8}{10}$$

האם יש על ציר-המספרים נקודה המתאימה למספר $\sqrt{2}$?

הפיתגוראים הציעו את הדרך הזו :

הם בנו ריבוע שצלעו היא הקטע OI (כלומר יחידה אחת), וסרטטו את האלכסון של הריבוע הזה.

לאחר מכן הם הקצו על ציר-המספרים קטע באורך האלכסון הזה. הם הקצו את הקטע מנקודת האפס, וקבעו בקצהו השני את הנקודה P .



"הנקודה P", טענו הפיתגוראים, "היא הנקודה המתאימה למספר $\sqrt{2}$ ".

(האם צדקו? הסבירו.)

הפיתגוראים ניסו למצוא מספר רציונלי שמתאים לנקודה P , כלומר הם ניסו למצוא מספר רציונלי השווה ל- $\sqrt{2}$.

א.

2. ננסה גם אנחנו למצוא מספר רציונלי השווה ל- $\sqrt{2}$.

את המספר הרציונלי שאנחנו מחפשים, השווה ל- $\sqrt{2}$, נסמן על ידי השבר המצומצם $\frac{m}{n}$ (m ו-n מספרים שלמים) וננסה לענות על השאלות הבאות :

א. האם כל שבר פשוט ניתן לדעתכם להציג כשבר מצומצם?

ב. אם $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, האם אפשר להסיק ש $\frac{m^2}{n^2} = 2$? הסבירו מדוע.

ג. אם $\frac{m}{n}$ הוא שבר מצומצם - האם גם השבר $\frac{m^2}{n^2}$ הוא שבר מצומצם?

הסבירו והדגימו על ידי הצבת ערכים שונים עבור m ו-n.

ד. נסו למצוא שני מספרים m^2 ו- n^2 המקיימים את התנאי $\frac{m^2}{n^2}=2$.

ה. אם הצלחתם בסעיף הקודם - כתבו מהו השבר הפשוט $\frac{m}{n}$ השווה ל- $\sqrt{2}$.

כפי שאמרנו, זמן רב האמינו הפיתגוראים שלכל נקודה על ציר-המספרים מתאים מספר רציונלי.

הם נחרדו לגלות תגלית מדהימה: לנקודה P על ציר-המספרים המתאימה למספר $\sqrt{2}$ - הם לא הצליחו למצוא מספר רציונלי מתאים. יתר על כן, הם אפילו הגיעו למסקנה **שאין** מספר רציונלי כזה!

לפי סיפורים שאין להם סימוכין ברורים, התגלית הזו זעזעה את פיתגורס עד כדי כך, שהוא הורה לתלמידיו להקריב 100 שוורים לאלים, ו...לשמור את התגלית בסוד מוחלט. יש אף סיפור שטוען שהוא דן את אחד מהחברים באסכולה הפיתגורית למוות בטביעה, כיוון שזה איים לחשוף את הסוד המפחיד.

ההוכחה שאכן קיימים מספרים אי-רציונליים, כלומר קיימים מספרים שלא ניתן כלל לבטא אותם בצורת שבר, הופיעה רק מאתיים שנה מאוחר יותר, בספר המפורסם *היסודות* של המתמטיקאי היווני **אוקלידס.**

אוקלידס הציג הוכחה מתמטית שהמספר $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי. שיטת ההוכחה שלו היא **על דרך השלילה**.

בשיטה זו מניחים שהטענה שרוצים להוכיח היא **לא נכונה**, ואז, בעזרת שרשרת של מסקנות לוגיות מגיעים ל**סתירה.** מסתירה זו נובע שההנחה שהטענה המקורית שקרית הייתה הנחה מוטעית, כלומר **הטענה המקורית** חייבת להיות **נכונה** .

שיטת הוכחה זו היא לעתים נשקו הטוב ביותר של המתמטיקאי.

במקרים שבהם קשה או בלתי-אפשרי להוכיח את הטענה המקורית בצורה ישירה, ניתן להניח דווקא את ההפך – שהטענה לא נכונה - ואז להראות שמגיעים לסתירה.

3. לפניכם ההוכחה ש- $\sqrt{2}$ איננו מספר רציונלי. קראו ונסו לנמק כל שלב בהוכחה.

1) קיימות רק שתי אפשרויות:

א. $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי – אפשר למצוא מספרים שלמים m ו-n כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

או:

ב. אינו מספר רציונלי – אי-אפשר למצוא מספרים שלמים m ו-n כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

2) נניח שקיימים מספרים שלמים m ו-n כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$,

ושהשבר צומצם כמה שאפשר, כלומר למספרים השלמים m ו-n אין גורם משותף.

3) מההנחה (בשלב 2) אפשר להסיק: $2 = \frac{m^2}{n^2}$

4) משלב 3 אפשר להסיק: $2n^2 = m^2$

5) משלב 4 נובע: m^2 הוא מספר זוגי.

6) אם m^2 מספר זוגי אז **גם m הוא מספר זוגי**.

7) אם m הוא מספר זוגי אז m^2 מתחלק ב-4.

8) משלב 4 אפשר להסיק: $n^2 = \frac{m^2}{2}$

9) משלבים 7 ו-8 אפשר להסיק ש- n^2 הוא מספר זוגי.

10) אם n^2 מספר זוגי אז גם **n הוא מספר זוגי**.

11) אם גם **m מספר זוגי** (שלב 6) וגם **n מספר זוגי** (שלב 9)

אז אפשר לצמצם עוד את השבר $\frac{m}{n}$ (ב-2).

12) שלב 10 **סותר** את ההנחה **שהשבר צומצם כמה שאפשר** (שלב 2).

13) מסקנה: ההנחה ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי אינה נכונה.

אם כן, האפשרות שנותרה היא ש- $\sqrt{2}$ **אינו מספר רציונלי**.

4. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ אינו מספר רציונלי. בדקו במחשבון את ערכו המספרי המקורב.

מספר שאינו רציונלי נקרא מספר **אי-רציונלי.** מספר אי-רציונלי הוא מספר שלא ניתן לייצג אותו כמנה של שני מספרים שלמים.

למעשה, מספרים אי-רציונליים נחשבים משונים עד היום, מפני שלא ניתן לכתוב אותם כשבר עשרוני סופי, ואפילו לא כשבר עשרוני מחזורי, אלא רק כשבר עשרוני אינסופי המהווה רצף של ספרות בלא סדירות ובלא תבנית קבועה החוזרת על עצמה. כלומר, לעולם לא נוכל לכתוב את המספר האי-רציונלי בצורה **מפורשת - נוכל לכתוב רק אומדן של המספר!**

לדוגמה, אם ננסה לבטא את $\sqrt{2}$ בצורה עשרונית, נקבל: ...1.414213562 (בדקו במחשבון).

5. א. האם $\sqrt{4}$ הוא מספר רציונלי או אי-רציונלי?
ב. כתבו שני מספרים משלכם שהשורשים שלהם הם מספרים רציונליים.
ג. כתבו שני מספרים משלכם שהשורשים שלהם הם מספרים אי-רציונליים.

6. אתגר האם לדעתכם המספר ...0.12123123412345 הוא מספר רציונלי? הסבירו.

7. א. בין אילו מספרים שלמים נמצאים המספרים הבאים?

דוגמה בין אילו מספרים שלמים על ציר-המספרים נמצא המספר $\sqrt{2}$?

$$1<2<4 \leftarrow \sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4} \leftarrow 1<\sqrt{2}<2$$

$\sqrt{93.2}$ $\sqrt{37}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{7}$

ב. הראו כי $1<\sqrt{\frac{1}{3}}<\frac{1}{4}$

ג. בין אילו שברים פשוטים על ציר-המספרים נמצא $\sqrt{\frac{1}{5}}$?

קבוצת המספרים הממשיים כוללת את המספרים הרציונליים ואת המספרים האי–רציונליים. לכל מספר ממשי מתאימה נקודה על ציר-המספרים, וכן להפך: לכל נקודה על ציר-המספרים מתאים מספר ממשי.

8. אתגר הראו כי $\sqrt{10}$ הוא מספר ממשי (כלומר הראו כיצד ניתן לסמן את $\sqrt{10}$ כנקודה על ציר-המספרים).

9. הרחבה האם קיים מספר ממשי השווה ל- $\sqrt{-4}$? הסבירו.

משימות לסיכום

01. לכל סוג של מספרים תנו 3 דוגמאות:
- מספרים טבעיים
- מספרים שליליים
- מספרים שלמים
- מספרים רציונליים
- מספרים אי-רציונליים
- מספרים ממשיים.

11. א. מצאו מספרים ששייכים ליותר מאחת מהקבוצות במשימה 10.
ב. האם יש מספרים ששייכים רק לקבוצה אחת? נמקו.