המרכז לטכנולוגיה חינוכית

העתקות וסימטריה - מדריך למורה

הפעילות המוצעת כאן היא פעילות ארוכה ומורכבת, אין הכרח לעשות את כולה ניתן לעשות רק חלקים ממנה. למשל: לעשות את פעילות א' בנושא שיקוף ופעילות ב' בנושא סימטריה בלבד, רק את פעילות ג' בנושא סיבוב, או רק את פעילות ד' בנושא הזזה. כל אחת מהיחידות יכולה לעמוד בפני עצמה. השאלות הנוגעות לסימטריה במערכת צירים יכולות להינתן כעבודה לתלמידים אשר מסיימים מהר את המשימות שנתנו, כמשימות הרחבה נוספת לתלמידים מצטיינים או כעבודה בבית לתלמידים טובים הדורשת אינטגרציה של ידע נוסף מעבר לנלמד ביחידה.
כלל הפעילויות מתוכננות ל- 8 שעות, כאשר יש משימות עודפות לתלמידים שמסיימים מהר מאחרים, או כעבודת בית.

פעילות א: שיקוף

משימה 1:

א. בפעילות זו מתנסים התלמידים לראשונה בשיקוף סביב ישר כלשהו. מטרת הפעילות להביא את התלמידים להכרה כי שיקוף של צורה מסוימת נותנת צורה אחרת הזהה לצורה הראשונה (חופפת לה). הפעילות חופשית לגמרי במובן שכל תלמיד יכול לסרטט משולש אחר ולהעביר את הישר במקום אחר ביחס למשולש. אנו מניחים כי יהיו תלמידים שיעבירו את הישר בתוך המשולש בעוד אחרים יעבירו אותו מחוץ למשולש. יתכן ויהיה לתלמידים בשלב זה קשה לראות את הצורות הזהות כאשר הן מכסות (חלקית) זו את זו ובמקרה זה, כדאי לכוון את התלמידים להזיז את הישר מחוץ למשולש, כך שכל צורה תראה בשלמותה.

ב. חשוב לאפשר לתלמידים להשתמש במילים שלהם ולקבל כל תאור המייצג את העובדה שהצורות זהות. יתכן ויעלו ביטויים כמו: "זה כמו מראה", "הצורות אותו דבר", "זו אותה צורה", "זה אותו דבר, אבל הפוך" וכו'. אלו הם ביטויים המייצגים נכונה את המצב וניתן לקבל אותם. יחד עם זאת בהמשך הדיון כדאי לבדוק עם התלמידים מה מייצג את המראה, מה בדיוק "הפוך" ולכוון אותם לשימוש במושגים המתמטיים המובאים בפעילות.

ג. על מנת לשקף נקודה ביחס לישר יש לבנות אנך מהנקודה לישר בעזרת מד הזווית ואז להעתיק את הקטע על אנך לישר מצדו השני. בהעתקת צורה יש להעתיק כל אחד מהקודקודים ואז לחברם. במידה והתלמידים מתקשים לבצע פעילות זו בעזרת סרגל ומחוגה, ניתן לעשות זאת בעזרת קיפולי נייר על נייר אפייה שקוף, במקרה זה השיקוף הוא פעולה מיידית, היות ולאחר הקיפול ניתן לראות את הנקודה מצדו השני של הנייר ולסמנה.

ד. יתכן ותלמידים ימצאו שיטות אחרות להעתקת צורה וחשוב לבחון איתם האם שיטות אלו הן יציבות במובן זה שהן עובדות בכל מצב. למשל: יתכן ותלמידים יבחרו כציר שיקוף ישר אנכי או אופקי המשורטט במחברת החשבון וצורה הבנויה על ישרים אלו ויעתיקו את הצורה על ידי ספירה של משבצות, ברור

ששיטה זו אינה מתאימה בכל מצב. אחר כך חשוב לערוך עם התלמידים דיון ולהסיק מהם הקווים המקשרים בין הצורות ולהגיע מתוך כך להכללה לגבי ביצוע השיקוף.

יתכן מצב ובו יהיו מספר בניות רבות ושונות בכיתה וניתן יהיה לערוך את הדיון על בסיס עבודה אחת של כל תלמיד. במקרה זה ניתן לוותר על סעיף ד.

משימה 2:

א. בקשו מהתלמידים להשתמש בכלי הצורות ולבחור בו מלבן. על מנת לשרטט מלבן יש לסמן שני קודקודים ונקודה על הצלע הנגדית (הנחיות אלו כתובות בתכנה מימין לסרגל הכלים כאשר בוחרים את כלי המלבן, יש להסב את תשומת לב התלמידים לכך).

ב. בשלב זה על התלמידים לזהות שכאשר הישר עובר דרך אמצעי צלעות נגדיות הצורה מועתקת לעצמה. חשוב לדבר עם התלמידים על הכתוב במסגרת האפורה ולוודא שהם מבינים את המושג צירסימטריה. ניתן לקשר את מושג ה סימטריה עם מושג העתקה עליו דיברנו בפעילות הקודמת היות ו סימטריה היא העתקה המזיזה את הצורה המקורית לעצמה. יתכן ותלמידים יעירו כי הצורה לא מועתקת לעצמה היות והקודקודים זזים, כלומר A' לא יהיה לעולם על A, כאשר משקפים את המלבן סביב אחד מצירי הסימטריה שלו. ניתן לפתח דיון זה ולבחון עם התלמידים האם יש משמעות לשמות הקודקודים או למיקומם אחד ביחס לשני מבחינת הצורה עצמה.

ג. לאחר שהתלמידים זיהו שהישר מחבר את אמצעי הצלעות הנגדיות הוא ציר סימטריה ברצוננו שיכלילו הבנה זו ויבנו את ציר הסימטריה הנוסף של המלבן.
כדי לשרטט את ציר הסימטריה הזה באופן מכוון, על התלמידים לבחור בסרטוט נקודה כאמצע של קטע. כדי לעשות זאת עליהם ללחוץ על המשולש הקטן בפינה הימנית התחתונה של כלי הנקודות (מופיע בסרגל הכלים שני משמאל, בדרך כלל מצויר עליו נקודה והאות A) ולבחור midpoint or center האפשרות האחרונה בתפריט זה. לאחר מכן יש לסמן את אחת הצלעות ואחר כך את הצלע הנגדית לה ואז לבחור ישר דרך שתי נקודות האפשרות הראשונה בתפריט הישרים (מופיע בסרגל הכלים שלישי משמאל). כעת התלמידים יכולים לבצע שיקוף של המלבן סביב ציר הסימטריה, כפי שעשו קודם לכן.

ד. יש לתת לתלמידים להתנסות בבניית האלכסון (ישר דרך שתי נקודות) ובשיקוף של המלבן סביבו. לאחר ההתנסות ברור כי האלכסון איננו ציר סימטריה של המלבן וכדאי לבדוק עם התלמידים מדוע איננו כזה, למרות שאיתן צודק בדבריו. ניתן לכוון את הדיון לכך שצורות חופפות הן צורות שניתן למקם אותן כך שיכסו זו את זו, אך לא בהכרח הן מראש מונחות כך שתוצאת השיקוף של צורה אחת תיתן את הצורה השנייה.
ניתן להרחיב דיון זה, ולבקש מהתלמידים לבדוק מה הפעולות הנדרשות כך שמשולש אחד אכן יכסה את המשולש האחר. במקרה זה שיקוף המשולש סביב אמצעי הצלעות הנחתכות ייתן את התוצאה המבוקשת. אפשר עוד להרחיב דיון זה גם לקראת סוף הפעילות לשרטט שני משולשים ישרי זווית חופפים ולבחון את סך הטרנספורמציות הנדרשות כדי להביא משולש אחד לכסות משולש אחר.

ה. בשלב זה של הפעילות על התלמידים לסכם את המידע שאספו במהלך הפעילות ולומר שלמלבן שני צירי סימטריה אשר כל אחד מהם עובר באמצע זוג צלעות נגדיות , כלומר כל קטע אמצעים במלבן מהווה גם ציר סימטריה שלו.

משימה 3:

א. בפעילות זו הציפייה היא, שהתלמידים יתייחסו לכך שריבוע הוא מלבן ולכן יש לו את צירי הסימטריה של המלבן ויבחרו אחד משני צירי הסימטריה שזיהו קודם לכן.

ב. גם בסעיף זה יתכן ועדיין מרבית התלמידים יבחרו בציר הסימטריה השני שהכירו במלבן וישרטטו אותו.

ג. כעת כל התלמידים חייבים לצאת מהידע המוכר להם ולמצוא צירי סימטריה נוספים לריבוע , סביר שמרבית התלמידים ינסו שוב את האלכסון כציר סימטריה.
במידה ומתעורר קושי במציאת צירי סימטריה נוספים, כדאי לדון בהבדל בין המלבן לריבוע , ולבחון עם התלמידים כיצד הבדל זה יכול לסייע ביצירה של צירי סימטריה נוספים. גם לאחר שזיהו התלמידים את האלכסונים כצירי סימטריה יש מקום לדון בהבדל בין הריבוע למלבן (או בין המשולשים שנוצרים בריבוע לאלו שנוצרים במלבן) אשר אפשר את הפיכת האלכסון לציר סימטריה.

משימה 4:

א. אין צורך שהתלמידים יסרטטו את הקטע בתכנה, אלא ניתן לעשות זאת כתרגיל מחשבתי. תרגיל זה יחזק את מיומנותם של התלמידים לחשוב גם ללא אמצעי המחשה ובשלב זה לאחר הדיון על המלבן והריבוע, הם יכולים לבצע מטלה זו . מטרת משימה זו , לחדד את המאפיינים של ציר סימטריה של קטע , כחלק מצורה, למשל בסיס של משולש במשימה הבאה.

משימה 5:

א. המשולש הוא צורה מיוחדת חסרת אלכסונים , אשר העיסוק בה דורש סינתזה של הידע שנצבר עד כה. כדי לאפשר תהליך זה מוצגים בשרטוט מספר קווים לבדיקה . a הוא ישר כללי העובר מחוץ למשולש , יתכן ויהיו תלמידים שיזהו מיד שישר כזה לא יכול להיות ציר סימטריה של הצורה . b ו- f הם ישרים המתלכדים עם צלעות המשולש , גם ישרים כאלו לא יכולים להיות צירי סימטריה היות והצורה תועתק מחוץ לעצמה. c הוא ישר כלשהו העובר דרך אחד מקודקודי המשולש, אך הוא איננו חוצה זווית (ולכן לא תיכון או גובה במשולש). הישר d הוא ישר כלשהו העובר דרך המשולש ולכן נחתך עם שתיים מצלעותיו. הישרים e ו- g הם חוצי זווית, גבהים ותיכונים במשולש ולכן מהווים צירי סימטריה של המשולש . ישרים אלו עוברים דרך קודקוד (בדומה לאלכסון) ודרך אמצע צלע (בדומה לצירי הסימטריה של המלבן).

ב. לאחר שהתלמידים זיהו את שני הישרים הללו כצירי סימטריה , עליהם בסעיף זה לזהות מה התכונות הרלוונטיות של הישרים על מנת שיהיו צירי סימטריה . ציר סימטריה העובר דרך צלע של מצולע חייב לחצות את הצלע לשניים, על מנת שחלק אחד של הצלע יוכל "לכסות" את חלקו השני. בנוסף חייב להיות הקטע חוצה זווית על מנת שחלק אחד של הזווית יועתק לחלק האחר, הדבר נכון עם זווית המשולש וגם

עבור הזווית הישרה שמוצגת על ידי צלע המשולש . לאחר זיהוי התכונות התלמידים יוכלו להסיק לבד שיש במשולש שווה צלעות ישר נוסף מסוג זה.

ניתן להרחיב פעילות זו ולבדוק עם התלמידים מה מאפשרת כל אחת מתכונות הישר על ידי שאלות "מה אם לא". אם הישר היה רק חוצה זווית איזה חלק של המשולש לא היה מועתק לעצמו (רק הצלעות הכולאות את הזווית היו מועתקות לעצמן). אם הישר היה רק תיכון, מה היה קורה (רק הקודקוד ונקודת אמצע הצלע אשר מגדירים את התיכון, היו מועתקים לעצמם). אם הישר היה רק גובה מה היה קורה (רק חלק מהצלע אליה יורד הגובה הייתה מועתקת לעצמה). ניתן לחקור שאלות אלו בעזרת קיפולי נייר, או בעזרת הגאוגברה, על ידי סרטוט משולש כללי (שונה צלעות) בו כל אחד מהישרים אחר וביצוע שיקופים בכל פעם יחסית לישר אחר.

משימה 6:

א. משימה זו, כמו המשימה הקודמת דורשת ארגון מחדש של החומר והידע אשר נלמדו עד כה. תלמידים, יתכן ובאופן לא מפורש, זיהו את התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים כציר סימטריה של הצורה. כאן עליהם להביא ידע זה באופן מפורש לידי ביטוי ולשרטט משולש שווה שוקיים

ב. במשימה הקודמת התלמידים זיהו שניים מהתיכונים של משולש שווה שוקיים כצירי סימטריה, אם כי יתכן כפי שעשינו כאן במדריך, הם קראו לישרים אלו בשמות אחרים (גובה או חוצה זווית). כאן עליהם להכליל ולהסיק שבמשולש שווה צלעות כל התיכונים הם צירי סימטריה.

ג. משולשים אשר בהם התיכון הוא ציר סימטריה הם משולשים אשר בהם הש וקיים האחרות (אחרות מהצלע אליה מגיע התיכון) שוות והתיכון משמש גם כחוצה זווית וגובה.

ד. בסעיף זה על התלמידים להסיק כי כאשר במשולש שני זוגות של צלעות שוות, כל הצלעות שוות. ניתן לעלות בדיון את כלל המעבר המוכר מאלגברה (אם a=b וגם a=c אזי c=b).

משימה 7:

א. על מנת לסרטט דלתון על התלמידים לבחור בכלי הצורות (הקיצוני מימין בסרגל הכלים) דלתון ולסמן שלושה קודקודים שלו (יש להסביר זאת לתלמידים, אין הנחייה בתכנה עצמה).

ב. התלמידים יכולים להסיק מתוך המשימה הקודמת כי במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס יהיה ציר סימטריה, כפי שהיה במשולש שווה צלעות. מכאן שאחד מאלכסוני הדלתון מהווה ציר סימטריה.

ג. האלכסון המהווה ציר סימטריה הוא האלכסון המורכב מחוצי הזווית של המשולשים שווי השוקיים המרכיבים אותו. האלכסון השני, איננו מהווה ציר סימטריה היות והוא גובה במשולש שאינו שווה שוקיים ולכן אין לו את התכונות הנוספות הנחוצות (כפי שמפורט במשימה קודמת).

ד. כאשר ארבעת הצלעות של הדלתון שוות, כלומר כאשר הדלתון הוא גם מעוין, שני האלכסונים שלו מהווים צירי סימטריה. כל אחד מאלכסוני המעוין מחלק אותו לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף ולכן

כל אחד מהאלכסונים מורכב למעשה מהגובה לבסיסים של משולשים אלו ו מכאן שהוא גם ציר סימטר יה לצורה כולה.

משימה 8:

א. על מנת לשנות את צורת המקבילית ניתן להזיז את הקודקודים A, B ו- C של המקבילית המקורית. הזזה נעשית על ידי בחירה בכלי ההזזה (החץ, הראשון משמאל בסרגל הכלים). כל עוד יש חפיפה חלקית בין המקבילית והשיקוף שלה מבחינת הצלעות המקבילות לציר הסי מטריה, יתקבל משושה , כאשר המקבילית צרה עד כדי כך שאין חפיפה בין הצלעות נוצר מצולע בעל 12 צלעות. כאשר המקבילית "הופכת" למלבן, הישר המשורטט הוא ציר הסימטריה של המלבן ובשיקוף ביחס אליו יתקבל שוב מלבן

ב. ברור שהמצב של שיקוף ביחס לישר שחוצה את שתי הצלעות האחרות , סימטרי לחלוטין ולכן גם הוא יקיים את אותם התנאים. כאשר האלכסון מהווה את ציר השיקוף , השיקוף ייצור בדרך כלל מתומן, פרט למצב בו האלכסון ניצב לצלע המקבילית, במקרה זה יתקבל משושה . הסיבה לכך היא שבמצב זה השיקוף של צלעות המקבילית הניצבות לאלכסון יוצר ישר אחד שמרכזו בקודקוד המקורי של המקבילית. ישר אחר אשר שיקוף המקבילית ביחס אליו , יצור משושה הוא ישר המתלכד עם אחת מצלעות המקבילית. ישר זה הוא למעשה הזזה של הישר החוצה את הצלעות והמופיע בשרטוט המקורי.
כדי להפיק את המקסימום ממשימה זו , יש לאפשר לתלמידים את הזמן להתנסות לב נות ולבחון ישרים שונים. על מנת לקצר את משך התהליך ניתן לחלק אותם לקבוצות, לבקש מהם לחשוב מראש על ישרים שונים כך שכל אחד בקבוצה יוכל לבדוק ישר אחר ואחר כך להתכנס שוב כקבוצה ולהגיע למסקנות . מה התנאים הדרושים כדי ששיקוף סביב ישר כלשהו ייתן משושה כנדרש.

ג. בשלב זה, לאחר שהתלמידים התנסו בקווים שונים ורבים ובשיקופים רבים של המקבילית , סביר כי הם יאמרו שאין למקבילית צירי סימטריה.
אפשר להרחיב את הדיון בסעיף זה לדיון כללי בנוגע להוכחות במתמטיקה ומשמעותן. ההבדל בין הוכחה שדבר מסוים אינו קיים לבין "תחושה חזקה" לכך, המתקבלת מעיסוק במספר רב של דוגמאות . חשוב להדגיש בפני התלמידים, כי למרות תחושתם כי אין צירי סימטריה , לא ניתן להתבסס על כך כהוכחה . למרות האמור לעיל, במסגרת הלימודים של פרק זה, לא נוכיח את הטענה.

ד. כאן יש צורך בהגדרה מפורשת של הידע הנצבר לגבי מרובעים , כלומר צירי סימטריה במרובע יכולים להיות או קטע אמצעים במידה והוא מאונך לצלעות (כמו במלבן) או אלכסונים במידה והם חוצים את הזוויות (כמו בדלתון). כלומר אם למקבילית צירי סימטריה היא חייבת להיות מלבן (מקבילית בעלת זווית ישרה) ואז צירי הסימטריה שלה הם קטעי האמצעים, או מעוין (מקבילית בעלת זוג צלעות סמוכות שוות) ואז האלכסונים שלה חוצים את הזוויות.

משימה 9:

משימה זו דורשת מהתלמידים מחשבה לפני שהם יכולים להתנסות ולנסות את מחשבותיהם בתכנה . אמנם ניתן לשרטט את הישרים שהם צירי הסימטריה בתכנה , אך כדי לדעת כיצד לבנות את המשולש יש צורך בתכנון מוקדם. בנוסף יש להבין כי נקודת החיתוך של צירי ה סימטריה חייבת להיות מרכז הצורה , כי צירי הסימטריה מעתיקים גם את עצמם.

א. על מנת לסרטט את שני הישרים , יש להתחיל בבניית ישר דרך שתי נק ודות באופן אקראי. לאחר מכן לבחור בכלי השיקוף, סיבוב עצם סביב נקודה בזווית . יש לבחור את הישר (כעצם שרוצים לסובב), את אחת הנקודות המסומנות עליו כציר הסיבוב ולבחור בגודל הזווית 60^0. יש לשים לב לכך שסימן המעלות נשאר, כדי לציין באיזו יחידת מידה מדובר.

מתוך תוצאות משימה 4 התלמידים יודעים כי במשולש שווה צלעות ישנם שלושה צירי סימטריה והם התיכונים. כלומר שני ישרים אלו חייבים להיות תיכונים במשולש ולכן על כל אחד מהם יהיה קודקוד ובנוסף יהיה קודקוד אחד ביניהם. ישנן דרכים רבות לסרטט את המשולש הנדרש, אחת מהן מובאת כאן. כעת יש לבנות את המשולש מתוך התיכון . באופן אקראי מסמנים נקודה על אחד הישרים ואז משקפים אותה ביחס לישר האחר. פעולה זאת מתבצעת על ידי כלי השיקוף ביחס לישר. לאחר מכן יש לשקף את הקודקוד החדש סביב הישר עליו הנחנו את הקודקוד הראשון . חיבור שלושת הקודקודים ייתן את המשולש הרצוי. כמובן אפשר לבדוק שהוא אכן שווה צלעות ושהישרים מהווים צירי סימטריה שלו.

ב. זוהי משימת אתגר הדורשת חשיבה מעבר לידע הנלמד עד כה . צורה אחרת יכולה להיות משושה, אשר לו שלושה צירי סימטריה כמו למשולש, אך בשונה ממשולש יש לו שישה קודקודים. על מנת לבנות את המשושה יש לשקף את ציר הסימטריה האחד בשני ולקבל את שלושת האלכסונים הנגדיים המהווים את צירי הסימטריה ועליהם מונחים קודקודי המשושה. כעת יש לסמן נקודה אקראית על אחד הישרים ולשקף אותה סביב שני הצירים האחרים (פעולה זו תתן קודקודים של משולש ישר זווית – דרך נוספת לבנות את המשולש הנדרש בסעיף קודם). על מנת לקבל את שלושת הקודקודים האחרים יש לשקף את כל אחד מהם סביב נקודת מרכז המשושה (נקודת המפגש של צירי הסימטריה). על מנת לבצע שיקוף כזה יש לבחור שיקוף סביב נקודה (Reflect Object about Point) האפשרות השנייה בכלי השיקופים.

ישנן דרכים נוספות לבניית המשושה . אחת היא לבנות קודקוד אחד ולשקף אותו בסיבוב של 60^0 ביחס לנקודת המפגש. העתקת הקודקוד נעשית על ידי שיקוף של עצם ביחס לנקודה בזווית נתונה (כפי שבנינו את הישרים מלכתחילה). כל פעם יש לבחור את הקודקוד החדש שנוצר ולשקף אותו כדי "להתקדם" ברצף הקודקודים. למעשה כל צורה שנבנה באופן זה כך שזווית ההעתקה היא קבועה וגודלה מחלק את 120, תיתן צורה בעלת צירי סימטריה הנמצאים בזווית של 60^0 אחד לשני, אם כי כמובן אלו לא יהיו צירי סימטריה סמוכים.

אם נעתיק את הנקודה ב- 20^0 למשל נקבל מצולע בעל 18 צלעות שהישרים הנתונים הם אלכסונים בה. אם נעתיק את הנקודה ב- 40^0 למשל נקבל מצולע בעל 9 צלעות שהישרים הנתונים הם "תיכונים" בה, כלומר יוצאים מקודקוד וחוצים את הצלע שמולו. (במצולעים בעלי מספר אי זוגי של צלעות האלכסונים לא יכולים לשמש כצירי סימטריה והיות ומספר הקודקודים מצד אחד של האלכסון לעולם יהיה שונה ממספרם בצדו השני).

דרך אחרת היא להתייחס לצירי הסימטריה לא כאל אלכסונים, אלא כקטעי אמצעים. במקרה זה יש לבנות נקודה כלשהי על חוצה הזווית בין שני הישרים , לשקף אותה ביחס לאחד הישרים ולבנות קטע בין שתי הנקודות. קטע זה הוא צלע אחת של המשושה , יש להעתיקו בסיבוב של 1200 (או גודל זווית המצולע) עד לסגירת המשושה (המצולע). על מנת לבצע שיקופים של המשושה, יש לחבר את הנקודות למצולע , בעזרת כלי המצולעים (חמישי משמאל בסרגל הכלים). ניתן לבנות באופן כזה גם מצולעים זוגיים אחרים, אולם יש לחשב את הזווית בין שני צירי סימטריה סמופם.

בכל הצורות שנבנה יש לפחות שלושה צירי סימטריה , כפי שקיבלנו במשולש , היות וצירי הסימטריה משקפים גם את עצמם ולכן יש לפחות אחד הנוסף לשניים הנתונים מראש . במשושה יש ששה צירי סימטריה היות וגם קטעי האמצעים מהווים צירי סימטריה . כמובן במצולעים בעלי מספר רב יותר של צלעות יתכן מספר גדול יותר של צירי סימטריה, תלוי אם המצולע זוגי או לא.

משימה 10:

כמצוין בפעילות משימה זו היא משימת אתגר, לתלמידים מתקדמים ואין צורך לתת אותה לכל הכיתה.

א. צורת החשיבה הנדרשת במשימה זו דומה לצורת החשיבה במשימה הקודמת , אם כי כאן יש מורכבות גדולה יותר. במשימה הקודמת כאשר הזווית בין הישרים הייתה 60^0, הזווית הצמודה לה היא 120^0 וקל היה לראות שיש לפחות 3 צירי סימטריה. במשימה זו הזווית הצמודה ל- 30^0 היא 150^0 ובמבט ראשון לא ברור מה המספר המינימלי של צירי סימטריה, האם הוא באמת $\frac{360°}{30°} = 12$. הדרך הפשוטה ביותר לאחר המשימה הקודמת היא לבנות מצולע בעל 12 צלעות, שהישרים מהווים בו אלכסונים . בצורה זו קיימים שני צירי סימטריה (לא סמוכים) שהזווית ביניהם היא 30 מעלות, הוא בעל 12 צירי סימטריה. 6 צירי סימטריה שהם אלכסונים ו- 6 צירי סימטריה שהם קטעי אמצעים.

אמנם זהו המספר המינימלי של צירי סימטריה שונים , אולם זהו איננו המצולע הקטן ביותר . במצולע זוגי ובפרט במשושה, כפי שתיארנו במשימה הקודמת , קיימים גם צירי סימטריה המחברים אמצעי צלעות מקבילות. הזווית בין ציר סימטריה שהוא אלכסון לבין ציר סימטריה המחבר את אמצע הצלע הקרובה לאלכסון היא 30^0. סביר שהתלמידים לא יחשבו על כך מראש , אך ניתן לכוון אותם להתייחס לשני סוגי צירי הסימטריה ולתת להם לנסות. תיאור הבנייה מופיע במשימה הקודמת.

כמובן שיכולות להיות צורות נוספות, אם הזווית של 30^0 לא מתקבלת בין שני צירי סימטריה סמוכים אלא יש ביניהם צירים נוספים. למשל גם למצולע בעל 36 צלעות יש שני צירי סימטריה שהזווית ביניהם 30^0.

ב. כאשר הזווית בין צירי הסימטריה היא 70^0, ברור שצירי הסימטריה לא יכולים להיות סמוכים , היות ו- 70 לא מחלק את 360. כלומר ניתן להתחיל בברור אלגברי אילו מספרים מחלקים גם את 70 וגם את 360, המחלקים של 70 הם: 2, 5, 7. לכן מחלקים משותפים לשני המספרים יכולים להיות 2, 5 או 10. מספר המינימלי של צירי סימטריה יתקבל במחלק המשותף הגדול ביותר , 10. לכן המצולעים אותם ניתן לבנות הם מצולעים בעלי 36 צירי סימטריה (מתאים לזווית של 10^0 בין צירים סמוכים – 18 צירים שונים), 72 צירי סימטריה (מתאים לזווית של 5^0 בין צירים סמוכים – 36 צירים שונים) ו- 180 צירי סימטריה (מתאים לזווית של 2^0 בין צירים סמוכים – 90 צירים שונים).

משימה 11:

א. כפי שניתן לראות מהתקדמות המשימות ככל שיש יותר צירי סימטריה הזווית ביניהם קטנה יותר וכעת הגענו "לגבול" הסדרה, מה קורה כאשר יש אינסוף צירי סימטריה , כלומר כל ישר העובר דרך נקודת מרכז הצורה הוא ציר סימטריה . במידה והתלמידים אכן בנו מצולעים בעלי מספר צלעות רב הם בוודאי ראו שהמצולע נראה קרוב יותר ויותר למעגל . סביר כי באופן מיידי התלמידים יעלו את המעגל כפתרון למשימה זו ואף ידעו להסביר כי כל קוטר במעגל הוא ציר סימטרית

ב. השאלה היא אם יש צורה נוספת? כאן המקום לערוך דיון ולנסות ולאפיין את הצורה. האם זה יכול להיות מצולע? אם כן מה צריכים להיות המאפיינים שלו , אם לא מה יכול לאפיין את הצורה . ברור כי כל מצולע הוא בעל מספר סופי של צירי סימטריה ולכן זה איננו יכול להיות מצולע . יתכן ותלמידים יעלו את האליפסה היות ויש לה מאפיינים דומים למעגל והיא איננה מצולע . כדאי לתת להם להתנסות ו לגלות בעצמם שזו איננה יכולה להיות אליפסה (יש בתכנה כלי לסרטוט אליפסה, שישי מימין).
כלומר הצורה חייבת להיות אינסופית והכוונה היא כמובן לישר אינסופי בניגוד לקטע עליו דיברנו עד כה . המעבר לא קל היות ובדרך כלל לא עוסקים בישרים אינסופיים בגיאומטריה (באלגברה מדברים רבות על פונקציה קווית שהיא כמובן אינסופית) ואי אפשר לראות אותם אנו תמיד רואים קט ע סופי. ניתן לרמוז לתלמידים ולכוון אותם לתשובה ואז לשאול מהם צירי הסימטריה . למעשה כל אנך לישר הוא ציר סימטריה שלו.
ניתן לחשוב גם על המישור כולו כצורה וכמובן שכל ישר משקף את המישור לעצמו

הרחבה סימטריה במערכת צירים

משימה 1:

משימות אלו (21-81) מתאימות מאד ג ם כפעילויות סביב הלימוד של פונקציה קווית . כמובן שלא ניתן לבצע משימות אלו לפני שלומדים למצוא פונקציה קווית על פי שתי נקודות . כאשר כותבים את הפונקציה בחלון הקלט (מתחת לאזור הסרטוט) יש לרשום למשל y=x-2, באופן כזה ניתן אחר כך גם לבצע שיקופים סביב הישר (כאשר כותבים רק x-2, אמנם הישר יופיע נכון, אך לא ניתן יהיה לבחור בו כישר למשל לצורך ביצוע השיקוף.

א. המשולש הוא שווה שוקיים ולכן ציר הסימטריה שלו הוא הגובה לבסיס. ציר הסימטריה עובר דרך קודקוד הראש (1,0) ודרך אמצע הבסיס (2,2) והוא הפונקציה f(x)=2x-2.

ב. ישנם שני צירי סימטריה של המלבן . האחד עובר דרך אמצעי הצלעות הקצרות (2,0) ו- (-4,-6) והוא הפונקציה f(x)=x-2 והשני עובר דרך אמצעי הצלעות הארוכות (-3,-1) ו- (1,-5) והוא הפונקציה f(x)=-x-4.

ג. הישר המהווה ציר סימטריה לקטע הוא האנך האמצעי, כלומר זהו ישר העובר דרך אמצע הקטע הנקודה (0,2) ומאונך לו.
אם תלמידים מצליחים לזהות את נקודה נוספת בה צריך לעבור הישר (למשל (2,0) הם יכולים לבנות את הפונקציה ולבדוק האם היא מתאימה. תלמידים שלא רואים זאת ואינם יודעים עדיין את הקשר בין שיפוע

של פונקציה קווית אחת לשיפוע של פונקציה קווית המאונכת לה, יכולים לבנות את הישר באופן גיאומטרי ואז להציג את הייצוג האלגברי שלו.

כדי לבנות באופן גרפי את הישר יש לבנות את נקודת אמצע הקטע , ואז בכלי הישרים (הרביעי משמאל) לבחור ישר ניצב ובהתאם להוראות לבחור א ת נקודת אמצע הקטע ואז את הקטע עצמו . כדי לראות את הייצוג האלגברי של האובייקטים בקובץ יש ללכת לתפריט תצוגה (View) ולבחור תצוגה אלגברית (Algebra View). כאשר בוחרים את הישר הייצוג האלגברי שלו מקבל רקע בצבע תכלת . יש לשים לב שהייצוג הוא ייצוג של משוואה עם שני מש תנים ולא של פונקציה קווית (x+y=2). ניתן להסביר לתלמידים שבייצוג זה ה- y מייצג את ערך הפונקציה כלומר f(x) ולכן ניתן להמיר את הייצוג הזה בייצוג שקול של f(x)=-x+2. ניתן לראות כי ציר הסימטריה הוא אכן ישר יורד החותך את הצירים בנקודות(0,2) ו- (2,0).

משימה 2:

התלמידים יוכלו לראות כי ישנם שני ישרים המהווים צירי סימטריה של המרובע הנתון ($f(x) = 2x - 2$, ו- $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$). דיון מעניין שיכול לעלות ממשימה זו הוא מהו הריבוע . תלמידים אשר יענו מקבילית , ניתן לעמת אותם מול התוצאות שהתקבלו במשימה 7 לפיהן אין למקבילית צירי סימטריה . יחד עם זאת ברור מהסרטוט שהמרובע הוא מקבילית , לכן כדאי לבדוק איזו מקבילית היא זו . מרובע זה הוא כמובן מעוין, אך תלמידים רבים לא מזהים אותו ככזה כי מעוין הם רגילים לראות עומד על קודקודו ואילו זה מוצג באופן בו אנחנו רגילים לראות מקבילית.

משימה 3:

משימה זו היא משימה "הפוכה" ביחס למשימה הקודמת, נתונים צירי הסימטריה ויש למצוא את קודקודי המצולע. כדאי להנחות את התלמידים לבנות את המצולעים כך , שיוכלו להזיז את הנקודות לבדוק באיזה תחום ניתן להזיז אותן כך שעדיין ישמרו התנאים הנדרשים.

א. כל משולש שציר X הוא ציר הסימטריה שלו הוא משולש שווה שוקיים בעל קודקוד על ציר ה- X ובסיס הניצב לציר. לכן אחד הקודקודים י היה (x,0) ושני האחרים יהיו סימטריים ביחס לציר כלומר (x_1,y_1) ו- $(x_1,-y_1)$.

ב. ראשית על התלמידים לבחון מה התנאים הנדרשים ממרובע מסוג זה ולקבוע האם הישר הוא אלכסון הצורה או אולי ישר המחבר אמצעי צלעות נגדיות.

כאשר מתייחסים לישר כאל אלכסון המרובע יש לשרטט שתי נקוד ות על הישר ונקודה מחוצה לו . לשקף את הנקודה ביחס לישר ולחבר את ארבעת הנקודות למרובע . המרובע המתקבל הוא דלתון , בעל ציר סימטריה יחיד, כפי שראינו קודם לכן.

במידה ומתייחסים לישר כאל מחבר אמצעי צלעות יש לבנות שתי נקודות אקראיות מחוץ לישר משני צדדיו (במרחק שונה מהישר) ואחר כך לשקף אותן ביחס לישר . לחבר את הנקודות למרובע , המרובע המתקבל הוא טרפז שווה שוקיים גם הוא בעל ציר סימטריה יחיד.

חשוב לא לקבל ריבוע או מלבן כתשובה היות ולהם יש צירי סימטריה נוספים. במידה ויש זמן ועדיין לא נערכה הכללה מסוג זה, כדאי לערוך דיון הא ם ישנם ישרים אחרים שיכולים להיות צירי סימטריה במרובע, אפשר לתת לתלמידים לנסות ואחר כך להגיע למסקנה כללית

ג. כפי שהתלמידים למדו לאורך הפעילויות השונות מבחינת צירי סימטריה למקבילית אין כאלו, לטרפז שווה שוקיים ולדלתון יש אחד כזה, למלבן ומעוין יש שניים ולריבוע י ש ארבע צירי סימטריה. מאותם שיקולים אותם הזכרנו במשימה הקודמת, הישרים הללו יכולים לחבר קודקודים של המרובע או אמצעי צלעות אם נניח כי הקודקודים יושבים על צירי הסימטריה ונסרטט צורה מתאימה נקבל ריבוע (מעוין שזוויותיו ישרות). ריבוע לא עומד בדרישות היות ויש לו שני צירי סימטריה נוספים שאינם מופיעים במשימה. לכן ננסה לסרטט מרובע שצירי הסימטריה שלו מחברים אמצעי צלעות נגדיות. ניתן להתחיל מנקודה אקראית כלשהי בין הישרים הללו, ולשקף אותה פעם ביחס לישר אחד ופעם ביחס לישר השני. לאחר מכן את אחת הנקודות החדשות לשקף שוב כדי לקבל את הקודקוד הרביעי, כצפוי המרובע שהתקבל הוא מלבן. המלבן עומד בדרישות היות ויש לו רק שני צירי סימטריה.

ד. היות וצירי הסימטריה מעתיקים גם את עצמם, לצורה הנדרשת יש לפחות ארבע צירי סימטריה. ציר ה- X ושיקופו ביחס לישר f(x)=-x כלומר ציר ה- Y, וכן הישר f(x)=-x ושיקופו ביחס לציר ה- X כלומר הישר f(x)=x.

נסמן נקודה אקראית כלשהי על אחד מצירי הסימטריה ונעתיק אותה על ידי שיקוף סביב שני הצירים הסמוכים. את הקודקוד הרביעי ניתן לקבל על ידי שיקוף הקודקוד הראשון סביב ראשית הצירים או על ידי שיקוף אחד הקודקודים החדשים סביב ציר סימטריה סמוך לו. הצורה שהתקבלה היא כמובן ריבוע שקודקדיה על שני צירי סימטריה מאונכים זה לזה ושני הצירים האחרים מהווים קטעי אמצעים בו.

משימה 4:

א. גם כאן נתון ציר הסימטריה אך הוא מתייחס לקטע ולא לצורה שלמה. הרעיון בבסיס המשימה הוא אותו רעיון כל נקודה על הקטע צריך לשקף ביחס לישר כדי לקבל את הקטע המקורי כולו. לעיתים יותר קשה לתלמידים להכיל הבנה זו על צורה "מנוונת" כמו קטע.

את הנקודה מסרטטים על ידי כתיבה של קואורדינאטות הנקודה בתיבת הקלט בתחתית המסך כך: (2,4). לאחר מכן יש לשקף את הנקודה, שהיא למעשה נקודת קצה הקטע הנדרש, ביחס לישר ואחר כך לחבר את שתי הנקודות לקטע.

ב. התשובה הטריוויאלית היא בדומה לסעיף הקודם, לבחור נקודה אקראית ולשקף אותה ביחס לישר y=2. חשוב שהנקודה לא תהיה על הישר אחרת תתקבל נקודה יחידה ולא קטע.

תשובה אחרת, פחות מיידית, היא לבחור קטע על הישר f(x)=2 ולמעשה כל הנקודות על הקטע הן נקודות שֶבֶת שאינן זזות בשיקוף ולכן הישר משקף אותן לעצמן ממש.

לאחר המשימה כ דאי לחזור לדיון בתחילת הפעילויות (שכאשר משקפים עצם ביחס לישר כלשהו למעשה עלינו להוריד אנך אל הישר ולהעתיק את העצם על האנך מצדו השני של הישר במרחק שווה) ולבנות שוב את הקשר בין המושגים: העתקה, שיקוף וסימטריה.

משימה 5:

משימה זו יכולה להוות המשך וחיזוק לדיון על כך שנקודות הנמצאות על ציר הסימטריה מועתקות לעצמן , כלומר לא זזות ולכן הן נקראות נקודות שֶׁבֶת.

א. הנקודה (1,2) נמצאת על הישר f(x)=2x ולכן היא מועתקת לעצמה כאשר מתבצע שיקוף סביב ישר זה.

ב. באופן דומה כל נקודה שנמצאת על הישר , כלומר כל נקודה ששיעוריה מקיימים יחס של 1:2 מועתקת לעצמה בשיקוף סביב הישר ולכן הישר מהווה את ציר הסימטריה שלה.

משימה 6:

א. כפי שעלה ממשימה קודמת, כל נקודה שנמצאת על הישר כלומר כל נקודה מהצורה (x,x) תועתק לעצמה בשיקוף כזה.

ב. היות והפונקציות מוגדרות לכל x, אין למעשה נקודה של אמצע קטע וציר הסימטריה צריך לקיים כלל יחיד והוא היותו אנך לפונקציה. לכן כל פונקציה מהצורה f(x)=-x+n , היא פונקציה ניצבת לפונקציה f(x)=x ולכן שיקוף סביב ציר זה יעתיק אותה לעצמה.
במידה ומתעורר קושי , ניתן לחבר את התל מידים למשימה 10 שם התייחסנו לצורה האינסופית של הישר. בהמשך למשימה זו ניתן לערוך דיון על ההיבט האלגברי של שני ישרים המאונכים זה לזה, כלומר על הקשר בין שיפוע פונקציה קווית אחת לשיפוע פונקציה קווית אחרת הניצבת לה $m_1 \cdot m_2=-1$.

פעילות ג: סיבוב

משימה 1:

ב. גם כאן חשוב לקבל אמירות של התלמידים במידה והן מעבירות את המשמעות של הסיבוב, גם אם הן לא מדויקות מבחינה מתמטית.

ג. לאחר ששרטטו על נייר את המשולש והנקודה והגדירו לעצמם את זווית הסיבוב העתקה תתבצע באופן הבא. חיבור אחד הקודקודים עם הנקודה מחוץ למשולש. מדידת זווית כפי שהגדירו, שאחת משוקיה היא הקטע המחבר את הקודקוד עם הנקודה . מסרטטים את השוק השנייה ומקצים עליה קטע באורך הקטע המחבר את הקודקוד המקורי עם הנקודה.

ד. יתכן ותלמידים יבחרו בדרך הקלה של סיבוב בזווית של 90^0, או זווית אחרת בה ניתן להשתמש בקווי המחברת ככלי עזר במקום סרגל ומד זווית . יש לבדוק איתם כיצד יעשו זאת בזוויות אחרות , על מנת לוודא שמהות הסיבוב ברורה להם.

משימה 2:

המטרה של משימה זו בעיקר בסעיפים א' וב', היא תרגול הסיבוב וקבלת אינטואיציה לגבי המהות שלנ

א. במשימה זו התלמידים צריכים להבין כי מנקודה מחוץ לצורה על מנת אין אפשרות לחזור לצורה המקורית אלא אם כן בסיבוב מלא של 360^0. לכן במקרה זה אם הצורה כבר מסובבת ב- 90^0 יש להשלים את 270^0 החסרות.

ב. בסעיף זה הנקודה נמצאת בתוך המלבן, זוהי נקודת מרכז המלבן. למלבן סימטריה סיבובית של 180^0, לכן אם המלבן הכהה התקבל מסיבוב של 45^0, מלבן נוסף כזה יתקבל מסיבוב של 225^0.

ג. בסעיף זה יש להכליל את הסעיפים הקודמים. כדי להעתיק צורה לעצמה בסיבוב סביב נקודה שמחוץ למצולע יש לסובב ב- 360^0. נקודה בתוך המצולע יכולה להיות רק נקודת המרכז (במלבן נקודת חיתוך האלכסונים), היות ונקודה זו חייבת להישאר במקומה. במקרה זה כפי שראינו בסעיף ב' למלבן יש סימטריה סיבובית של 180^0.

בשלב זה יתכן ולא כל התלמידים הפנימו כי סיבוב שלם של 360^0 סביב כל נקודה, מעתיק כל צורה לעצמה. יש לאפשר לתלמידים להתנסות באופן חופשי כדי לראות זאת. ניתן ליצור סרגל גרירה ולהזיז את זווית הסיבוב באופן רציף כך שיקל על התלמידים לראות את כל הסיבובים המתקבלים הן בסעיף א' והן בסעיף ב' (אשר יכיל גם את ג').

כדי ליצור את סרגל הגרירה יש לבחרו בכפתור השלישי מימין (אם לא עובדים בקובץ shapes, השני מימין), לשנות את השם האוטומטי של הסרגל לשם של זווית (בפינה הימנית העליונה) ולהגדיר את התחום בין 0 ל- 360. לאחר מכן לבחור שיקוף של צורה בזווית סביב נקודת מרכז ובמקום להגדיר זווית על ידי מספר להכניס את השם שניתן לסרגל הגרירה. לאחר מכן ניתן בעזרת החץ להזיז את הנקודה על סרגל הגרירה בין שני הקצוות שלו ולקבל את הסיבוב של הצורה בכל התחום. התנסות כזו תקל על התלמידים לראות את הסיבוב באופן רציף ולזהות את נקודות הסימטריה של הצורה. כדי להגיע במדויק לזווית נדרשת, יש לרשום בשורת הקלט את שם סרגל הגרירה ואת הערך הרצוי לדוגמה אם שם סרגל הגרירה a: $a=45^0$.

משימה 3:

במשימה זו התייחסות גם לשיקופים, על מנת ליצור חיבור נוסף בין שני המושגים. במידה והתלמידים לא התנסו בפעילויות השיקוף, אפשר לאפשר להם להתנסות באופן אינטואיטיבי, או לוותר על היבט זה של המשימה.

א. במשולש שווה שוקיים אין סימטריה סיבובית, היות וכל סיבוב בזווית קטנה מ- 360^0, תתן צורה המוסטת מהצורה המקורית.

במידה והתלמידים עשו את המשימות לגבי שיקוף, ניתן לקשר לעובדה כי היות ולמשולש זה ציר סימטריה יחיד, אין אפשרות לסובב אותו בזווית שתחזיר את צורתו המקורית. במידה ויש זמן ניתן לבדוק צורות נוספות בעלות ציר סימטריה יחיד כמו דלתון או טרפז שווה שוקיים

ב. ריבוע היא המצולע בעל מספר הצלעות הקטן ביותר אשר לו סימטריה סיבובית של 90^0.

במידה והתלמידים עשו את המשימות בנוש א שיקוף ניתן לקשר ולהסביר כי , היות ויש לריבוע שני זוגות של צירי סימטריה אשר מאונכים ביניהם (אלכסונים וקטעי אמצעים), כל סיבוב ב- 90^0 סביב המרכז יחזיר את הצורה לעצמה.

ניתן להרחיב ולבדוק עם התלמידים את המלבן, אשר גם לו זוג אחד של צירי סימטריה מאונכים ביניהם . אולם בגלל שזהו זוג יחיד , הסימטריה הסיבובית של המלבן היא של 180^0 ולא 90^0. בהשוואה למשולש שווה השוקיים, למלבן יש שני צירי סימטריה מאונכים ולכן יש לו סימטריה סיבובית, בניגוד למשולש.

ג. גם למתומן סימטריה סיבובית של 90^0 למרות שיש לו גם סימטריה של 45^0, באופן דומה מצולעים אחרים להם סימטריה סיבובית קטנה מ- 90^0 המהווה מחלק של 90.

משימה 4:

א. רחל צודקת, כפי שהוסבר במשימה הקודמת.

ב. התלמידים יכולים להשתמש במתומן שהוזכר במשימה הקודמת ולחפש מצולעים נוספים . יש אפשרות לחבר את התלמידים לניתוח האנליטי ולבחון את הצורות הנוספות להם סימטריה סיבובית של 90^0, כפי שהוסבר בסעיף ג' של המשימה הקודמת.

ג. באופן מפתיע, כפי שיראו התלמידים מניסיונם, למשולש שווה שוקיים אין סימטריה סיבובית של 60^0. גם במשולש שווה צלעות הסימטריה הסיבובית היא הזווית בין צירי הסימטריה , אולם בניגוד לריבוע יש שתי זוויות בין הצירים גם 60^0 וגם 120^0. סיבוב ב- 60^0 איננו מחזיר את הצורה לעצמה , אלא רק סיבוב ב- 120^0. הזווית של 60^0 מתקבלת בין קודקוד לאמצע צלע ולכן זוהי איננה זווית של סימטריה סיבובית . זווית בין שני קודקודים היא של 120^0 וזוהי אכן זווית הסימטריה.

משימה 5:

א. במשימה זו התלמידים יכולים מבחינה אנליטית לחשב את הסיבובים המעתיקים את הצורה לעצמה, היות וכל כפולה שלמה של 40^0, תעתיק את הצורה לעצמה.

התלמידים יכולים להתנסות בבניית המצולע על ידי שרטוט שתי נקודות אקראיות , אחת תשמש כקודקוד והשנייה כנקודת מרכז הצורה . לאחר מכן יש לשקף את "הקודקוד" סביב נקודת מרכז הצורה ב- 40^0, להמשיך ולשקף את הקודקוד החדש סביב נקודת המרכז ב- 40^0 וכך להמשיך את ה שיקופים עד חזרה לקודקוד המקורי ו"סגירת" המצולע.

משימה 6:

כאשר זווית הסימטריה הסיבובית היא 70^0, ברור שלא ניתן להשתמש בשיטה של משימה 5, היות ו- 70 לא מחלק את 360, לכן משימה זו נחשבת משימת אתגר. ניתן להתחיל בברור אלגברי אילו מספרים מחלקים גם את 70 וגם את 360, המחלקים של 70 הם: 2, 5, 10. לכן מחלקים משותפים לשני המספרים יכולים להיות 2, 5 או 10. זווית הסימטריה הסיבובית הגדולה ביותר תתקבל במחלק המשותף הגדול ביותר, 10. לכן המצולעים אותם ניתן לבנות הם מצולעים בעלי סימטריה סיבובית של 10^0, סימטריה סיבובית של 5^0 וסימטריה סיבובית של 2^0.

גם כאן ניתן לקשר משימה זו לפעילות בנושא שיקוף ולבחון את הקשר בין זווית הסימטריה הסיבובית לזווית בין צירי הסימטריה. מבחינת צירי הסימטריה כאשר הסימטריה הסיבובית היא של 10^0 יש למצולע 18 צירי סימטריה, זווית של 5^0 מתאימה למצולע בעל 36 צירי סימטריה וזווית של 2^0 מתאימה למצולע בעל 90 צירי סימטריה.

סיבוב ושיקוף במערכת צירים

משימה 1:

גם משימה זו מהווה קישור בין שיקוף ובין סימטריה סיבובית . במידה והתלמידים לא התנסו בפעילויות השיקוף , אפשר לאפשר להם להתנסות באופן אינטואיטיבי, או לוותר על היבט זה של המשימה.

א. משימה זו הפוכה למשימה 4 בפעילות 2 בנושא שיקוף במערכת צירים , שם ציר הסימטריה היה ישר מהצורה f(x)=a. ניתן להסיק מהמשימה הקודמת כי כל אנך לישר זה יהווה ציר סימטריה היות והפונקציה היא אינסופית. מבחינה אלגברית ניתן לומר כי כל ישר מהצורה x=b מהווה ציר סימטריה לפונקציה הנתונה. כדאי לאפשר לתלמידים לבנות ישרים אלו ולהתנסות בשיקופים ביחס אליהם

יתכן וחלק מהתלמידים לא יחשבו מראש על האנך ואז יש לאפשר להם להתנסות בישרים שונים עד שיגעו לאנך. התלמידים יכולים לעשות זאת על ידי יצירת קטע בין שתי נקודות, שיקוף הישר ביחס לקטע והזזת אחת הנקודות עד שהשיקוף יתלכד עם הפונקציה המקורית

ב. היות ואין שום דבר מיוחד בפונקציה f(x)=2, התלמידים יכולים להכליל כי לגבי כל פונקציה מהצורה הזו, ניתן לומר שצירי הסימטריה שלה הם ישרים מהצורה x=a, ישרים המקבילים לציר ה- Y.

ישנן פונקציות נוספות אשר להן ציר (צירי) סימטריה המקבילים לציר Y, למשל $f(x)=(x-a)^2$, במקרה זה ציר הסימטריה הוא רק הישר x=a. כמובן שכל צורה גיאומטרית בעלת ציר סימטריה ניתן לבנות כך שישר המקביל לציר Y יהווה ציר סימטריה שלו.

במידה והתלמידים לא חושבים על פונקציות נוספות , ניתן להראות להם פונקציות שונות. למשל לכל פונקציה זוגית, ציר סימטריה בציר ה- Y. בנוסף לפונקציה טריגונומטרית מחזורית יש צירי סימטריה נוספים המקבילים לציר ה- Y, ניתן לבקש מהתלמידים לזהות צירי סימטריה אלו.

ג. היות ופונקציה זו היא ישר, הסימטריה הסיבובית היחידה שלו היא של 180^0. סימטריה זו תתקיים סביב כל נקודה על הישר, היות והוא אינסופי.

ד. גם במקרה זה המורה יכול לשאול את התלמידים לגבי פונקציות אחרות המועתקות לעצמן בסיבוב של 180^0. במקרה זה ניתן להרחיב את מגוון הפונקציות שניתן לדבר עליהן, היות וכל פונקציה קווית מועתקת לעצמה בסיבוב כזה . גם כאן, תלוי ברמת הכיתה , המורה יכול להציג פונקציות שונות ולשאול את התלמידים האם גם להן סימטריה סיבובית כזו. למשל לפרבולות אשר להן צירי סימטריה כמו לישר , אין להן סימטריה סיבובית כמו לישר. אך לפונקציות טריגונומטריות מחזוריות יש סימטריה סיבובית כזו , כאשר נקודת מרכז הסיבוב יכולה להיות כל נקודת חיתוך עם ציר X.

משימה 2:

משימה זו באה לחדד את ההבדל בין פונקציה או ישר אינסופיים לבין קטע סופי , אשר בו , כמו בצורות הגיאומטריות עליהן דובר בפעילויות השונות, יש להעתיק את קצה הקטע A לקצה הקטע B.

א. לקטע AB יש ציר סימטריה המאונך לו וחוצה אותו, זוהי הפונקציה f(x)=x.

ב. כמו בפונקציה קווית כ פי שעלה ממשימה 6, גם הסימטריה הסיבובית של הקטע היא של 180^0. אולם להבדיל מהמקרה הקודם , במקרה זה היות והקטע הוא סופי הסימטריה הסיבובית תתקבל רק סביב נקודת האמצע של הקטע.

פעילות ד: הזזה

משימה 1:

כדי להזיז את הריבוע הבהיר לריבוע הכהה , יש להעתיק כל אחד מקודקוד יו בוקטור המקביל לציר X ואורכו 12 יחידות.

סביר שהתלמידים ישתמשו במשבצות המסומנות ותשובה זו כמובן מתאימה . יחד עם זאת כדאי לנסות ולהכליל עם התלמידים את התהליך לפני שמגיעים להסבר המופיע בהמשך.

משימה 2:

א. על מנת לשרטט את וקטור ההזזה על התלמידים לבצע את הפעולה ההפוכה לזו הכתובה בדף המשימות, כלומר עליהם לשרטט וקטור 3 יחידות ימינה ואחת למטה. התלמידים יכולים לבחור כל נקודה ממנה לסרטט את וקטור ההזזה , יחד עם זאת קל יותר יהיה לחשב את נקודת קצה הווקטור מאחד הקודקודים.

ב. לאחר ביצוע ההזזה, קל לתלמידים לראות כי הצורה המתקבלת היא משולש . חשוב לבקש מהתלמידים לכתוב את קודקודי המשולש ולשאול אותם מה הקשר בין הקודקודים של המשולש המקורי ושל המשולש לאחר הזזה. הכוונה היא שהתלמידים יזהו כי ההבדל בין בכל מקרה ערכי ה- X בין כל שני ק ודקודים מתאימים הוא 3 יחידות שמאלה וההבדל בין ערכי ה- Y בין כל שני קודקודים מתאימים הוא 1 למטה. ווקטור ההזזה הוא (-3,-1).

ג. מטרת הפעילות היא לבצע את ההזזות באופן ידני כדי לחוש באופן מוחשי את שלבי ההזזה השונים . במידה ויש זמן כדאי לתת לתלמידים לבצע הזזה על פי וקטור שיבחרו הם עצמם או חבריהם

משימה 3:

א. יש לתת לתלמידים לבצע את הפעולות בתכנה.

ב. סעיף:

1. יש לסובב את המעוין ב- 90^0 סביב המרכז (0,6) ולאחר מכן הזזה (0,-6). כמובן שפעולות ההעתקה הן פעולות אדטיביות המקיימות את חוק החילוף ולכן ניתן גם לבצע אותן בסדר הפוך. וזה יכול להיות פתרון לסעיף ב'.

2. פתרון אפשרי הוא הזזה של המעוין בווקטור (6,-12) ולאחר מכן סיבוב ב- 2700 (נגד כיוון השעון).
3. סיבוב המעוין סביב נקודת המרכז שלו (0,0) ב- 900.

משימה 4:

שתי המשימות הללו הן משימות אתגר או כאלו שניתן לתת לתלמידים שסיימו את עבודתם לפני הזמן המתוכנן.

א. יש לתת לתלמידים להתנסות בסרטוט מצולעים שונים ובהזזות שונות . מתוך התנסות זו התלמידים יוכלו לראות כי לא ניתן להזיז צורה לעצמה . כפי שקורה במציאות כאשר משהו זז איננו יכול להישאר במקומו . הכוונה בסעיף זה לכוון את אינטואיציות התלמידים לעבר צורות אינסופיות כגון פונקציות וישרים כפי שעלו במשימות קודמות.

ב. לאחר שהתלמידים יבנו את ההזזה יוכלו לראות כי הגרף לא משתנה . ניתן לראות בתצוגה האלגברית כי ישנן שתי פונקציות מהצורה f(x)=1, לאחר ההזזה.

ג. לאחר התנסות בוקטורים שונים המסקנה היא כי כל הזזה של הפונקציה בווקטור מהצורה (a,0). אם התלמידים לא מתנסים בווקטורים אחרים כדאי לעודד אותם לעשות כן או לבקש מהם הסבר מדוע התנסות כזו מיותרת.

ד. סעיף זה כוונתו לחבר לפעילויות קודמות בנושא שיקוף וסיבוב במידה והתלמידים עשו פעילויות אלו כדאי שוב לקשר את סוגי הסימטריה השונים. במידה ולא ניתן לתת להם להתנסות בכך באופן אינטואיטיבי, או לוותר על הסעיף . כפי שראינו קודם לכן , לפונקציה ישרה יש סימטרית שיקוף סב יב כל ישר הניצב לפונקציה וסימטריה סיבובית של 180^0.

משימה 5:

יש לתת לתלמידים להתנסות בס רטוט ווקטורים שונים . באופן כללי הפונקציה מוזזת לעצמה על ידי כל ווקטור מהצורה (x,x). הסימטריות האחרות שוב , כפי שהוזכר קודם לכן סימטרית סיבוב של 180^0, ושיקוף סביב ישר מהצורה f(x)=-x+a.