מדריך למורה

משך הפעילות: שעתיים

ציוד נדרש : מחשבונים

משימה 1: אמיר קונה בגדים

ניתן לגשת לשאלה בדרכים שונות, ויש לאפשר לתלמידים למצוא בעצמם את הדרך. בין האפשרויות:

- לבנות טבלה ובה לכתוב לכל מספר של סוודרים כמה חולצות ניתן עוד לקנות בכסף ומהו העודף:

מספר סוודרים	מספר חולצות	עודף
1	17	9.75
2	15	11.6
3	13	13.45
4	11	15.3
5	10	1.25
6	8	3.1
7	6	4.95
8	4	6.8
9	2	8.65
10	0	10.5

- לנסות צירופים שונים, ולזהות מגמות, למשל: העודף הנותר יורד כאשר מספר הסוודרים עולה (ומספר החולצות יורד) עד שהוא מגיע לערכו המינימלי, ואז קופץ לערך גבוה ושוב יורד.
- לייצר בגיליון אלקטרוני טבלה המייצגת את העודף לכל זוג סדור (מספר חולצות,מספר סוודרים), לזהות בכל $$שורה את העודף המינימלי (החיובי) ולזהות מגמות.

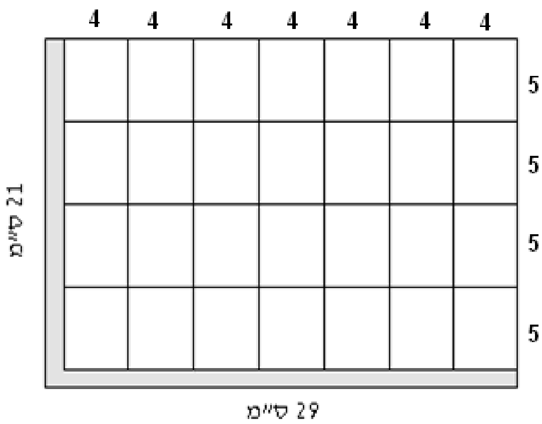
נסו לכוון את התלמידים לזהות את החוקיות והמגמות: מה הקשר בין מספר החולצות למספר הסוודרים שניתן לקנות? כיצד משתנה העודף?

התשובות:

א. 5 סוודרים ו-10 חולצות. העודף: 1.25 ₪.

ב. 18 חולצות, ללא סוודרים.

משימה 2: כמה פתקים אפשר לגזור מדף?



א. (1) בדרך המוצגת יתקבלו 28 פתקים.

(2) את שטח הנייר שנשאר אפשר לחשב בשתי שיטות:

אפשר לחסר את שטח כל הפתקים משטח הדף:

$49=29\times21-28\times20$ סמ"ר

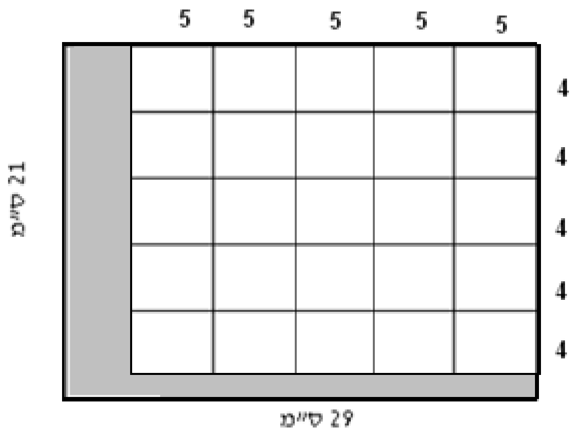
ואפשר לחשב ישירות את השטח כסכום של שני מלבנים: $49 = 1\times21+1\times28$ סמ"ר

(3) אף על פי ששטח של 49 סמ"ר הוא גדול יותר משטחם של שני פתקים – לא ניתן לגזור משטח הנייר שנשאר ולו פתק נוסף אחד.

ב. סעיף זה מקשרת בין שטח הפתק$$מספר הפתקים? לבין שטח הדף שנשאר לא מנוצל.$$דווקא סעיף זה?

כוונו את התלמידים לתיעוד יעיל של החקירה והניסיונות שלהם, כך שיוכלו להסיק מסקנות לקראת הניסיונות הבאים.

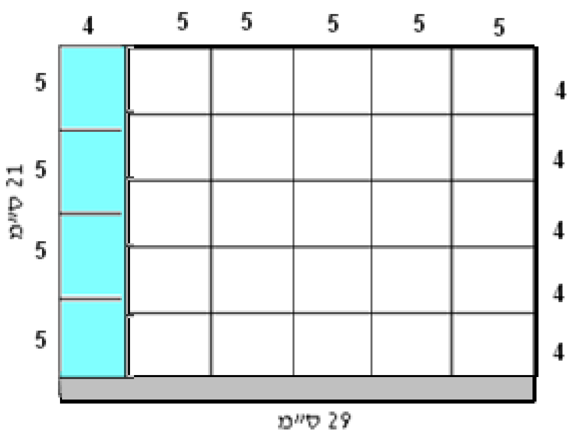
(1) יש להניח שהתלמידים ינסו תחילה לסרטט את הפתקים על הדף בכיוון הפוך מזה שבדוגמה שהוצגה להם. בדרך זו הם יקבלו רק 25 פתקים, אך בשטח הנותר יש רצועה ברוחב 4 ס"מ, ויש להניח שהתלמידים יבחינו שאפשר לגזור מרצועה כזו עוד פתקים:



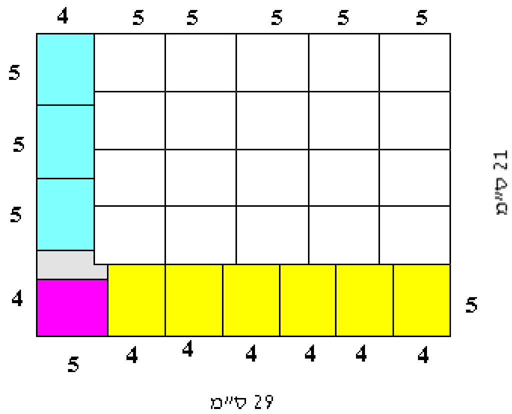
בסידור כזה אפשר לגזור 29 פתקים.

שטח הנייר הנשאר הוא 29 סמ"ר.

השטח עדיין גדול משטחו של פתק אחד, אך הרצועה צרה ולא ניתן לגזור עוד פתקים.



(4) אם מוותרים על כללי הגזירה ומסדרים בכיוון אחד רק חלק ממספר הפתקים האפשרי ניתן לנצל יותר טוב את החלק הנותר. בסידור שמשמאל נכנסים 30 פתקים.



(5) אפשר לדעת ש-30 הוא מספר הפתקים הגדול ביותר האפשרי לפי חישוב השטח שנותר (שהוא קטן משטחו של כרטיס אחד). אפשר להגיע למספר הזה גם מהחישוב של טליה בסעיף ג.

ג . יש לכוון את התלמידים להגיע למסקנה שהחישוב של טליה יכול לתת רק חסם עליון על מספר הכרטיסים האפשרי, ולא את המספר עצמו.

לדוגמה: אם נרצה לגזור מדף A4 כרטיסים בגודל 11 ס"מ x 12 ס"מ, החישוב של טליה יראה שניתן לגזור 4 כרטיסים כאלה, כאשר בפועל קל לראות שאין שום דרך לסדר 4 כרטיסים על דף אחד.

משימה 3: תכנון בריכה

א. התלמידים צריכים להפעיל שיקולים מתחום הגאומטרייה כדי להראות שהבריכה היא ריבועית: מחפיפת המשולשים ניתן להסיק שארבע צלעות הבריכה שוות באורכן , ומחישובי זוויות בצירוף הנתון שהמגרש הוא ריבוע הם יכולים להסיק שזוויות הבריכה ישרות .

ב. התלמידים צריכים להבין שכדי לשמור על תנאי הבעיה יש לחלק את כל צלעות המגרש באותה חלוקה.

ג. קל להבין ששטח הבריכה יהיה מרבי אם קדקודיה יתלכדו עם קדקודי המגרש (לא יישאר שטח דשא).

שתי הדרישות האחרות קצת יותר קשות. כדאי לעודד את התלמידים להעלות השערות באופן אינטואיטיבי, ואחר כך כדאי להיעזר בתוכנה גרפית.

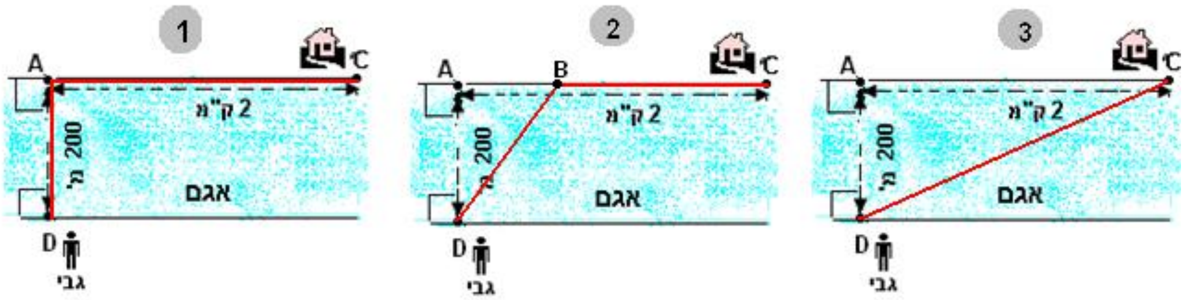
התלמידים ימצאו ששטח הדשא יהיה מרבי אם קדקודי הבריכה יהיו בדיוק באמצעי הצלעות של המגרש. במצב זה שטח הדשא יהיה שווה בדיוק לשטח הבריכה; שטח הדשא לא יוכל להיות גדול משטח הבריכה בשום מצב.

ד. $f(x)=2x(100-x)$, $g(x)=x^2+(100-x)^2$

א.

משימה 4: בחירת מסלול

א. הנה 3 דרכים שונות להגיע הביתה:



ב. כדי ללכת ברגל מרחק קטן ככל האפשר על גבי לבחור בדרך 3 (הנקודה B מתלכדת עם C).

כדי לשוט מרחק קטן ככל האפשר הוא צריך לבחור בדרך 1 (הנקודה B מתלכדת עם A).

הדרך הקצרה ביותר היא דרך 3.

ג. חשוב לשים לב שהדרך הקצרה ביותר אינה דווקא המהירה ביותר, כיוון שהדרך הקצרה היא כולה בשיט, והשיט אִטי יותר מההליכה. לתלמידים אין כלים בשלב הזה למצוא את הדרך המהירה ביותר באמצעות חישוב. בסעיף ח הם יוכלו למצוא זאת באמצעות תוכנה להצגת פונקציות. בשלב הזה הם יכולים רק לשער ולנסות כמה דוגמאות פרטיות.

ד. (1) משך הזמן (בדקות): $\frac{200}{45}+\frac{2000}{75}=\frac{280}{9}=31\frac{1}{9}$

(2) לפי משפט פיתגורס אורך הדרך במטרים הוא $\sqrt{2000^2+200^2}\approx 2010$

לכן משך הזמן בדקות הוא: $\frac{2010}{45}=\frac{134}{3}=44\frac{2}{3}$

(3) לפי משפט פיתגורס אורך מסלול השיט של גבי הוא:

$$BD=\sqrt{200^2+1000^2}\approx 1020$$

משך הזמן (בדקות) הוא: $\frac{1020}{45}+\frac{1000}{75}=\frac{108}{3}=36$

החישובים מראים שמבין שלוש האפשרויות האלה הדרך המהירה ביותר היא שיט עד לנקודה A ומשם צעידה.

אפשר לבדוק אפשרויות נוספות: לשנות את המרחק שגבי הולך ברגל ולחשב את הזמן. למשל, אפשר לבדוק מה יקרה אם גבי ירד מהסירה במרחק קטן מ-A, או במרחק קטן מ-C.

(נקודת המינימום היא בערך המרחק 150 מ' מ-A. במצב זה הזמן שגבי ישהה בדרך (בדקות) יהיה: $\frac{\sqrt{200^2+150^2}}{45}+\frac{1850}{75}=\frac{272}{9}=30\frac{2}{9}$; אבל אין שום צורך לתת את הנתון הזה לתלמידים – הם ימצאו אותו בהמשך.)

ה. **(1)** הערך x=0 מתאים למסלול של שיט עד לנקודה A והליכה ברגל עד הבית.

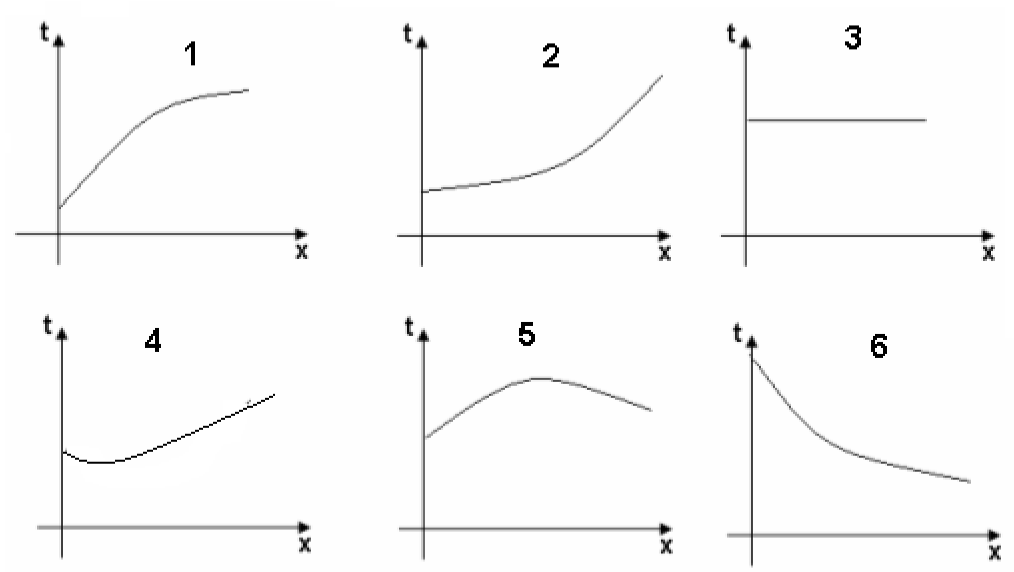
הערך x=2000 מתאים למסלול של שיט ישר מהנקודה D הביתה.

(2) הסעיף עוסק למעשה בתחום ההגדרה של פונקציה שמהגדרתה עוסקת בסיפור מסוים ולכן מוגדרת רק על מספרים שהם רלוונטיים לסיפור.

הערך f(288) מתאר כמה זמן תארך הדרך אם הנקודה B תהיה במרחק 288 מ' מ-A. המסלול הזה אפשרי לכן הערך קיים.

לעומת זאת f(-2) לא קיים כי x מייצג את המרחק בין A ל-B, ומרחק לא יכול להיות שלילי.
הערך f(5000) לא ייתכן כי הנקודה B צריכה להיות בין A ל-C, והמרחק בין שתי נקודות אלה הוא רק 2000 מ'.

ו. אם התלמידים בדקו רק את שלושת המסלולים שפורטו בסעיף ד, הם יוכלו רק לקבוע שגרפים 3, 5 ו-6 אינם מתאימים. אם הם בדקו עוד ערכים קטנים של x ייתכן שהם כבר יכולים לדעת שהפונקציה יורדת בהתחלה ורק אחר כך עולה, ולכן גרף 4 הוא היחיד שאפשרי.



ז. בסעיף זה התלמידים יבנו, צעד אחר צעד, את הביטוי של הפונקציה t(x).

(1) המרחק (במטרים) שגבי ישוט הוא: $\sqrt{x^2+200^2}$

(2) המרחק במטרים שהוא ילך ברגל הוא: 2000-x

(3) זמן השיט בדקות הוא: $\frac{\sqrt{x^2+200^2}}{45}$

(4) זמן ההליכה בדקות: $\frac{2000-x}{75}$

(5) הזמן הכולל של הדרך (בדקות) הוא: $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+200^2}}{45}+\frac{2000-x}{75}$

ח. ביישומון הצגת פונקציות אפשר להשתמש בכמה דרכים: אפשר פשוט לסרטט את גרף הפונקציה כולו ולענות על השאלות. (כדי לציין $\sqrt{x}$ במחשב יש לרשום sqrt(x).) אפשר גם לבדוק את שני המחוברים כפונקציות נפרדות: זמן השיט (שהוא פונקציה עולה) וזמן ההליכה ברגל (שהוא פונקציה יורדת). אפשר לדון בקצב השינוי של כל אחת מהפונקציות: הפונקציה היורדת היא קווית, ואילו הפונקציה העולה - קצב העלייה שלה עולה בהדרגה, מעלייה קלה מאוד ועד עלייה מהירה מאוד. לכן בפונקציית הסכום בהתחלה הירידה "גוברת" ואחר כך העלייה "גוברת" על הירידה. התלמידים עדיין לא למדו פונקציה ריבועית, אבל אם הקבוצה חזקה במיוחד אפשר לדבר על קצב ההשתנות של x2.

לאחר סרטוט הגרף ניתן לראות כי הדרך המהירה ביותר היא שיט עד למרחק של כ-150 מ' מ-A (בגרף עצמו לא ניתן לזהות את המספר במדויק. הערכה של 130-170 מטר תספיק) ואחר כך צעידה ברגל לאורך הגדה. את הנקודה המדויקת קשה למצוא בכלים שבידי התלמידים – הם יתקשו לראות הבדלים בין ערכי הפונקציה עבור ערכי x שונים בטווח 152-148 מ' מ-A.