שבילים למצוינות

מטח המרכז לטכנולוגיה חינוכית

הנחיות למורה - חידות של מספרים ראשוניים

משך הפעילות: 3 שעות.

פתרונות למשימות ודגשים חשובים

בפעילות זו התלמידים יגלו ויחקרו את המספרים הראשוניים. הפעילות מלווה בשאלות חקר רבות – <u>מומלץ לאפשר לתלמידים להגיע אל המסקנות וגם להציע שאלות משלהם באופן עצמאי ועם הכוונה מינימלית</u>. כדאי לדון בכל המסקנות שהעלו התלמידים במהלך הפעילות. דגשים נוספים משולבים בפתרונות עצמם. מומלץ ביותר להשתמש לאורך הפרק ביישומון "לוח המספרים", דרך הפתקית בכותר או דרך אופק חט"ב.

חיפוש מספרים ראשוניים, הנפה של ארטוסתנס

1)

א. חמשת המספרים הראשוניים הראשונים הם: 2, 3, 5, 7, 11.
התלמידים יכולים להציע שיטות שונות למציאת מספרים ראשוניים, ולבדיקה אם מספר הוא ראשוני או לא. כשמדובר במספרים קטנים אפשר למשל לבדוק אם המספר מתחלק באחד המספרים הקטנים ממנו.

ב. על פי ההגדרה המספר 1 אינו מספר ראשוני, כי הוא מתחלק רק במספר אחד, ולא בשני מספרים טבעיים. מצד שני – הוא אכן מתחלק ב-1 ובעצמו.
הנה למשל שתי סיבות בגללן לא רצוי להחשיב את 1 כראשוני ():
1. המספרים ראשוניים הם אבני הבניין שכפולותיהם מניבות את כל שאר המספרים, והמספר 1 הוא לא עוזר לנו ליצור אף מספר מלבד את עצמו.
2. אחד המשפטים המרכזיים הנוגעים לראשוניים הוא המשפט היסודי של האריתמטיקה, הקובע כי כל מספר ניתן לכתוב בצורה יחידה (עד כדי שינוי סדר) של מכפלת ראשוניים. אם היינו מכלילים את 1 בראשוניים, המשפט לא היה נכון, לדוגמה: $6=2\cdot3=1\cdot2\cdot3=1\cdot1\cdot2\cdot3=1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3$.

2) השימוש בנפה של ארטוסתנס בעזרת היישומון נעשית על ידי צביעת הכפולות של המספרים השונים.
לגבי השימוש בלוח המספרים: ניתן לצבוע טור שלם על ידי צביעת החץ שמעל הטור, וגם שניתן לשנות את רוחב השורה וכך לצבוע בקלות את כל הכפולות של מספר מסויים, כפי שיוסבר. זכרו שהמספר 1 הוא לא ראשוני, ולכן יש לסמנו על הלוח ככזה.

א. ניתן לבצע את הפעילות בלוח המספרים. ניתן גם לבצע את הפעילות קודם בלוח בחוברת, ולאחר מכן לבדוק איך התוח עוזר לזרז את התהליך. בעבודה בלוח:

• את הכפולות של 2 ניתן לצבוע בכמה דרכים: לצבוע את הטורים של 2, 4, 6, 8 ו-10, או לכווץ את הלוח לשני טורים וצביעת הטור הימני. לאחר מכן יש להחזיר את 2 עצמו לצבע המקורי.
• על מנת לצבוע את הכפולות של 3 כדאי לכווץ את הלוח ל-3 טורים ולצבוע את הטור הימני, מלבד המספר 3 עצמו. בקשו מהתלמידים לצבוע את כל הכפולות של 3 בצורה מהירה, וודאו שהם מכירים את האפשרויות שהלוח מציע.

ב. • אין טעם לצבוע את הכפולות של 4, שכן 4 הוא מספר **פריק**, והכפולות שלו כבר נצבעו. יש לצבוע את הכפולות של המספר **הראשוני** הבא – 5.

• בראש הרשימה לא יכול להופיע מספר פריק. כל מספר פריק עד הראשוני הבא מתחלק במספר הקטן ממנו וקטן או שווה לראשוני האחרון שבחרנו, ולכן הוא כבר צבוע.

• כל מספר פריק מורכב מכפולות של ראשוניים. לאחר מחיקת הכפולות של 2, 3 ו-5, המספר הפריק הבא שלא נמחק צריך להיות כפולה של המספר הראשוני הבא, 7, אך לא יכול להיות כפולה של הראשוניים שמחקנו. לכן המספר הפריק הבא שלא מחקנו יהיה **הריבוע** של 7 – 49.

ג. המטרה היא למצוא את כל הראשוניים עד 100. בהמשך לסעיף הקודם, נצטרך לבדוק את כל הראשוניים עד **השורש** של 100 – 10. מכיוון שעשר הוא פריק, וכך גם 9 ו-8, נצטרך לצבוע את הכפולות של הראשוניים עד 7 בלבד.

ד. המספרים הראשוניים עד 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13 ,17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

הנפה של ארטוסתנס עד 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

מכאן והלאה כדאי לבקש מהתלמידים להעלות השערות באשר ללוח המספרים שמולם, ולנסות להוכיח או להפריך אותן, בשילוב עם ההשערות שמעלה המורה.
אפשר לשנות את מספר הטורים כדאי לראות דברים בצורות שונות

(3

ב. בשורה הראשונה והשניה יש 4 מספרים ראשוניים. בכל השאר יש פחות.

ג. הרצף היחיד של 10 מספרים עוקבים שמכיל 5 מספרים ראשוניים הוא 2-11. כל רצף אחר כזה יכיל לכל היותר 4 מספרים ראשוניים. הסיבה היא שמתוך 10 מספרים עוקבים חייבים להיות 5 מספרים זוגיים, שהם לא ראשוניים (למעט המספר 2). בנוסף, רצף כזה יכיל לפחות מספר אחד המסתיים ב-5, אשר יהיה גם הוא פריק (שוב, למעט המקרה הפרטי של 5 עצמו).
ניתן לראות בלוח המספרים שכל מספר ראשוני החל מהעשיריה השניה מסתיים ב-1, 3, 7 או 9. תצפית זו יכולה לעזור להגיע למסקנה הכללית.

ד. זו הזדמנות מצויינת לדבר על מה דרוש להוכחה ומה דרוש להפרכה. כל עוד לא הוכחנו אחרת, ייתכן רצף של עשרה עוקבים ללא ראשוניים. קל יותר לנסות להפריך מאשר להוכיח. אם ממשיכים את רשימת הראשוניים, ניתן לראות רצף של 13 מספרים עוקבים ללא ראשוניים בתוכם, בטווח 114-126. אפשר להרחיב את השאלה ולשאול האם קיימת עשרת ללא ראשוניים. גם כאן ההוכחה היא ניסויית – קיימת עשרת כזו בטווח 201-210.

ה. במאה השניה יש פחות ראשוניים מאשר במאה הראשונה – 21 לעומת 25. סביר שהתלמידים ישערו כך, שכן ככל שאנחנו פוסלים כפולות של עוד ועוד ראשוניים, המספרים הלא מסומנים הופכים נדירים יותר ויותר.

4)

א. נכון בהחלט. הסיבה פשוטה – החל מ-3 והלאה, לפחות חצי מהמספרים הם פריקים – הזוגיים. בנוסף לזה, יש עוד אי זוגיים רבים שגם הם פריקים.

ב. נכון, מאותה סיבה.

ג. לא נכון. קבוצה של עוקבים היא מושג כללי מדי. ראינו כבר שיש מספרים ראשוניים בהפרש של 2 מספרים (למשל 41, 43). קבוצת העוקבים 41-43 תכיל שני מספרים ראשוניים, ורק אחד פריק. עוד דוגמה היא הקבוצה 2-3.

5)

א. המספר הקטן ביותר שהתוצאה שלו תתחלק בשלושת המספרים יהיו המכפלה של שלושתם זה בזה - $2502559 \times 53087 \times 8861$.

ב. ניתן לקחת את הביטוי מהסעיף הקודם ולחסר או להוסיף לו 1, למשל.
הסיבה היא שהביטוי הוא כפולה של 8861. הכפולה הקודמת תהיה קטנה ב-8861 בדיוק, והכפולה הבאה תהיה גדולה ב-8861 בדיוק. כל מספר ביניים לא יכול להוות כפולה של 8861. ההסבר תקף גם לכך שהביטוי שרשמנו אינו כפולה של שני הראשוניים האחרים.

ג. כן. אם ניקח את המכפלה של כל המספרים האלו, ונוסיף אחד לתוצאה, נקבל מספר שלא מתחלק באף אחד מהם. כמו כן, המספר הראשוני ה-50,000,001, למשל, אינו מתחלק באף אחד מהקודמים לו.

6) יש מספר אינסופי של ראשוניים. אוקלידס הוכיח את זה. בדומה לתשובות לשאלה 5. אם היה מספר סופי של ראשוניים, אז המכפלה של כולם ועוד 1, לא היתה מתחלקת באף אחד מהם, ולכן לא היתה מתחלקת באף מספר הקטן ממנה מלבד 1, וכך היינו מקבלים עוד מספר ראשוני.

חיפוש מספרים ראשוניים, הנפה של ארטוסתנס

7) המטרה בשאלות היא להניע את התלמידים לחקור את לוח המספרים, ולנסות להעלות השערות, טענות, והוכחות לגבי התכונות של קבוצת הראשוניים. ובכל זאת, התשובות הן:

א. קיים זוג אחד כזה – 2 ו-3. כל זוג עוקבים אחר יכיל מספר זוגי פריק.

ב. קיים זוג אחד כזה – 2 ו-13. כל זוג אחר יכיל מספר זוגי פריק.

ג. לא קיים זוג כזה. 2 ו-15 לא מתאימים מכיוון ש-15 פריק, וכל זוג אחר יכיל מספר זוגי פריק.

8)

א. 3-5, 5-7, 11-13, 17-19, 29-31.
אפשר להרחיב ולשאול עוד – כמה זוגות ראשוניים תאומים יש במאה הראשונה? שימו לב שלמעשה יש 8 – יש זוגות תאומים כמו 29-31 שלא שמים לב אליהן לפעמים. אפשר לשאול איך כדאי לספור את זוגות התאומים כדי לדעת בוודאות שלא פספסנו? כדאי לצמצם את הלוח ל-2 טורים בלבד.

ב. תכונה בולטת היא שכל מספרי האמצע הם זוגיים. כמו כן, המספר האמצעי יתחלק ב-3 (מלבד המקרה 3-4-5), משום שהוא הפריק היחיד בשלשה.

ג. קיימת שלשה אחת כזו – 3, 5 ו-7. בכל שלשה אחרת של מספרים אי זוגיים עוקבים תמיד יהיה מספר אחד שמתחלק ב-3, ועל כן פריק.

9) הצעות להצגת המספרים:

12 = 5 – 17 = 11 – 23
34 = 3 – 37 = 13 – 47
56 = 3 – 59 = 11 – 67
88 = 13 – 101 = 19 – 107
100 = 3 – 103 = 7 – 107

בדיקת ראשוניות

10)

א. הראשוני היחיד הוא 443.

ב. אין צורך לבדוק חלוקה במספר פריק, שכן אם מספר מתחלק במספר פריק, הוא ניתן לחלוקה גם במספרים הראשוניים שהם הגורמים שלו.

ג. אם נחלק את המספר אותו אנחנו בודקים במספר הגדול מהשורש שלו, נקבל מספר הקטן מהשורש שלו. אם שני המספרים שלמים, זה אומר שכאשר נחלק במספר הקטן, נקבל את המספר הגדול. לכן האפשרות לפירוק זה מכוסה כאשר אנחנו בודקים את כל המספרים הקטנים מהשורש.

ד. הפירוק לגורמים:

$176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$
$235 = 5 \cdot 47$
$377 = 13 \cdot 29$
$469 = 7 \cdot 67$
$611 = 13 \cdot 47$
$723 = 3 \cdot 241$
$845 = 5 \cdot 13 \cdot 13$
$999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$

לשימושכם : רשימת המספרים הראשוניים עד 1000

2	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**
23	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**
59	**61**	**67**	**71**	**73**	**79**	**83**	**89**
97	**101**	**103**	**107**	**109**	**113**	**127**	**131**
137	**139**	**149**	**151**	**157**	**163**	**167**	**173**
179	**181**	**191**	**193**	**197**	**199**	**211**	**223**
227	**229**	**233**	**239**	**241**	**251**	**257**	**263**
269	**271**	**277**	**281**	**283**	**293**	**307**	**311**
313	**317**	**331**	**337**	**347**	**349**	**353**	**359**
367	**373**	**379**	**383**	**389**	**397**	**401**	**409**
419	**421**	**431**	**433**	**439**	**443**	**449**	**457**
461	**463**	**467**	**479**	**487**	**491**	**499**	**503**
509	**521**	**523**	**541**	**547**	**557**	**563**	**569**
571	**577**	**587**	**593**	**599**	**601**	**607**	**613**
617	**619**	**631**	**641**	**643**	**647**	**653**	**659**
661	**673**	**677**	**683**	**691**	**701**	**709**	**719**
727	**733**	**739**	**743**	**751**	**757**	**761**	**769**
773	**787**	**797**	**809**	**811**	**821**	**823**	**827**
829	**839**	**853**	**857**	**859**	**863**	**877**	**881**
883	**887**	**907**	**911**	**919**	**929**	**937**	**941**
947	**953**	**967**	**971**	**977**	**983**	**991**	**997**