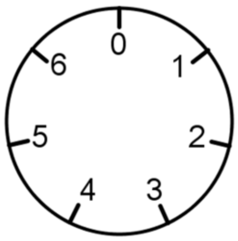
חשבון שאריות

משך הפעילות: 2-3 שיעורים.

בהמשך לפעילות שעסקה בשעוני-שנה יערכו כאן התלמידים היכרות ראשונית עם **תורת השאריות**. תורה זו מבוססת על פעולות החשבון הבסיסיות ועוסקת במספרים שלמים ולא גדולים, ולכן היא מאפשרת לרוב התלמידים – ולא רק למצטיינים שבהם - לעשות בה צעדים ראשונים בתחושת ביטחון; ובה-בעת תורה זו מספקת הסתכלות חדשה ושונה על המספרים ומגמישה את החשיבה.

רוב המשימות עוסקות בקבוצת השאריות מודולו 7 – אשר ימות השבוע משמשים לה מודל מובן ומוכר. המשימה האחרונה עוסקת בקבוצות שאריות נוספות ובהסתכלות כוללת עליהן.

שעון השאריות מודולו 7



ההגדרות הבסיסיות של החיבור והחיסור המוצגות לתלמידים מבוססות על צעידה קדימה ואחורה על ה"שעון" של המספרים 0-6.

תשובות, הערות והארות למשימות

משימה 1 – חיבור וחיסור בקבוצת השאריות מודולו 7

המשימה עוסקת בהיכרות עם החיבור והחיסור מודולו 7. כדאי לעודד את התלמידים להשוות בין התכונות של החיבור והחיסור ה"רגילים" לתכונות של הפעולות מודולו 7. האם החיבור החדש הזה הוא חילופי? קיבוצי? מדוע? האם הקשר בין חיבור לחיסור כאן דומה לקשר שהכרנו בעבר? מדוע? אפשר לדון בכך בתחילת המשימה, ואפשר לעשות זאת אחרי סעיף ג, תוך שימוש בלוח החיבור מודולו 7.

סעיפים א-ב מיועדים להוביל את התלמידים להבנת הקשר בין התוצאות שקיבלו בצעידה קדימה ואחורה על השעון לבין תוצאות החיבור והחיסור ה"רגילים" שקיבלו.

א.

1) $2+3=\mathbf{5}$ $\quad 2+_7 3=\mathbf{5}$

2) $5+6=\mathbf{11}$ $\quad 5+_7 6=\mathbf{4}$

3) $4+3=\mathbf{7}$ $\quad 4+_7 3=\mathbf{0}$

4) $4-3=\mathbf{1}$ $\quad 4-_7 3=\mathbf{1}$

5) $4-6=\mathbf{-2}$ $\quad 4-_7 6=\mathbf{5}$

6) $2-5=\mathbf{-3}$ $\quad 2-_7 5=\mathbf{4}$

ב. תוצאות הצעידה על השעון הן שארית החילוק ב-7 של תוצאות החיבור והחיסור ה"רגילים". ייתכן שהתלמידים יתקשו להחיל את המסקנה הזו על תרגילים 5 ו-6, כי הם אינם יודעים לחשב שאריות כשתוצאת החילוק שלילית. לשם כך יש להסביר להם שהשארית היא תמיד חיובית [כך למשל תוצאת התרגיל 10:3- איננה (3-) ושארית (1-) אלא (4-) ושארית 2 !]. הקשר הזה מתקיים כיוון שבצעידה על השעון אחרי כל שבעה צעדים (קדימה או אחורה) חוזרים לנקודת ההתחלה. מובן שרוב התלמידים לא יוכלו לתת הסבר כללי ויסבירו באמצעות דוגמאות. גם הסבר כזה הוא קביל, אם הוא משקף הבנה. נסו לכוון אותם לרשום את הדוגמאות לפיהם ניתן להכליל מהדוגמאות שהביאו.

ג.

$+_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

ד. אם המושגים ""משוואה" ו"פיתרון משוואה" כבר נלמדו בכתה, סעיף זה מהווה חזרה על המושגים ומשמעותם, ויתנסו בפיתרון בעזרת לוח פעולה.
גם אם המושגים עוד לא נלמדו, אפשר להסביר להם אותם, או פשוט לבקש מהם שישלימו מספר מתאים בכל תרגיל (משימות מסוג זה מוכרות להם משנים קודמות).

$1+_7\mathbf{3}=4$ $4+_7\mathbf{4}=1$ $\mathbf{2}+_76=2$ $\mathbf{0}+_75=5$ $\mathbf{3}-_75=5$

משימה 2 - האיבר הנגדי

המאפיין הבולט של האיבר הנגדי בחשבון ה"רגיל" הוא היותו "אותו מספר עם סימן הפוך". יש להניח שמבחינת התלמידים האפיון הזה חזק יותר מההגדרה הרשמית, שלפיה שני מספרים הם נגדיים אם סכומם הוא 0. בתורת השאריות אי-אפשר להתחמק משימוש בהגדרה הרשמית הזו, כאן המקבלת כאן משמעות חדשה, שכן הסכום 0 אינו מקבל מהליכה בשני כיוונים מנוגדים כמו על ציר המספרים, אלא מהמשך הליכה באותו כיוון של המחובר הראשון!

א. הנגדי של 5 בחשבון מודולו 7 הוא 2.

ב. $5 +_7 \mathbf{2} = 0$ $6 +_7 \mathbf{1} = 0$ $4 +_7 \mathbf{3} = 0$ $1 +_7 \mathbf{6} = 0$

ג.

שארית	0	1	2	3	4	5	6
נגדי	0	6	5	4	3	2	1

ד. פתרון תרגילי החיסור פעם על ידי צעידה לאחור ופעם על ידי הוספת הנגדי מהווה הזדמנות נוספת להשוואה בין הפעולות ה"רגילות" לפעולות מודולו 7.

$4 -_7 2 = 4 +_7 5 = 2$ $1 -_7 3 = 1 +_7 4 = 5$

$5 -_7 0 = 5 +_7 0 = 0$ $6 -_7 6 = 6 +_7 1 = 0$

משימה 3 - לוח הכפל של השאריות מודולו 7

אחרי שמגדירים את כפל השאריות כחיבור חוזר (מודולו 7) אפשר לדון עם התלמידים בקשר הכפול בין כפל זה לבין שאריות של חילוק: אם נבצע חיבור חוזר מודולו 7, או לחלופין נכפיל את שני הגורמים בכפל "רגיל" ואחר כך נמצא את שארית החילוק של המכפלה ב-7 – נקבל אותה תוצאה. מדוע? גם כאן אפשר כמובן להסתפק בהסברים המבוססים על דוגמאות, ואין לצפות מהתלמידים שיוכלו לתת הסברים כלליים.

א. הסעיף מיועד גם להתנסות בכפל וגם לדיון על החילופיות של הכפל. אפשר לתת לתלמידים להסיק את החילופיות מתוך הלוח (כיוון שהוא סופי!) ואפשר להסיק אותה מההגדרה ומהחילופיות של הכפל ה"רגיל" – תלוי ברמת הכיתה.

1) $5\times_7 3=\mathbf{1}$
2) $3\times_7 5=\mathbf{1}$
3) $6\times_7 4=\mathbf{3}$
4) $4\times_7 6=\mathbf{3}$
5) $4\times_7 1=\mathbf{4}$
6) $1\times_7 4=\mathbf{4}$
7) $3\times_7 0=\mathbf{0}$
8) $0\times_7 3=\mathbf{0}$

ב. .

X_7	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ג.

$1\ X_7\ \mathbf{4} = 4$ $\qquad 4\ X_7\ \mathbf{2} = 8$ $\qquad \mathbf{0}\ X_7\ 5 = 0$

למשוואה $n\times_7 0=5$ אין פתרון, כי גם בחשבון מודולו 7 כפל ב-0 תמיד נותן 0. אפשר להיווכח בכך גם באמצעות לוח הכפל מודולו 7.

משימה 4 - המספר ההופכי

כמו המספר הנגדי, כך גם המספר ההופכי מוכר לתלמידים באפיון הבולט שלו "1 חלקֵי..." יותר מאשר בהגדרה הרשמית שלפיה מספרים הופכיים הם שני מספרים שמכפלתם 1. ושוב, בחשבון שאריות יש צורך בהגדרה הרשמית ואי-אפשר למצוא מספרים הופכיים בלי להשתמש במלוא משמעותה של ההגדרה.

א. $1 \times_7 1 = 1$ $\qquad 2 \times_7 4 = 1$ $\qquad 3 \times_7 5 = 1$

ב. למשוואה $5 \times_7 n = 1$ יש פתרון יחיד: 3

למשוואה $0 \times_7 n = 1$ אין פתרונות כלל.

ג.

שארית	0	1	2	3	4	5	6
הופכי	אין הופכי	1	4	5	2	3	6

ד. בחשבון ה"רגיל" כל אחד מהמספרים 1 ו-(1-) הוא ההופכי של עצמו. שני המספרים האלה הם מספרים נגדיים בחשבון הרגיל.
השאריות בחשבון מודולו 7 כל אחד מהמספרים 1 ו-6 הוא ההופכי של עצמו. שני המספרים האלה הם מספרים נגדיים בחשבון מודולו 7. כמו כן, השארית של 1 בחלוקה ל-7 היא 1; השארית של 1- בחלוקה ל-7 היא 6.

ה. פתרו את תרגילי החילוק. אם אין פתרון לתרגיל - ציינו מדוע.

$0 \div_7 2 =$ **0** $\qquad 5 \div_7 0 =$ אין פיתרון $\qquad 3 \div_7 4 =$ **6** $\qquad 1 \div_7 6 =$ **6** $\qquad 4 \div_7 2 =$ **2**

ו. למשוואה $4 \times_7 n = 5 \times_7 n$ יש רק פתרון אחד: 0. אפשר לראות זאת לפי לוח הכפל: העמודה היחידה בה עבור 4 ועבור 5 מתקבלת אותה מכפלה. עוד דרכים לראות זאת:

<u>בהליכה על "שעון השאריות"</u> לאחר שהלכנו 4 פעמים n צעדים, אנו נלך עוד n צעדים ונגיע לאותו מקום. השארית היחידה שהוספה שלה מביאה אותנו לאותו מקום על השעון היא $n = 0$.

<u>באופן אלגברי</u> ניתן לחסר משני אגפי המשוואה $4 \times_7 n$ (את החיסור מודולו 7 הגדרנו במשימה הראשונה) ונקבל $n = 0$.

משימה 5 - חשבון שאריות בקבוצות מספרים נוספות

א.

$\times_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

ב. הציגו בגיליון את לוחות הפעולה מודולו 4. מצאו לכל שארית את המספר ההופכי ואת המספר הנגדי:

שארית	0	1	2	3
נגדי	0	3	2	1
הופכי	אין	1	אין	3

- לכל מספר בקבוצת השאריות מודולו 4 יש מספר נגדי, אבל לא לכל מספר יש מספר הופכי: בנוסף ל-0, שאין לו הופכי לא בחשבון ה"רגיל" ולא בשום קבוצת שאריות, במודולו 4 גם למספר 2 אין הופכי. מדוע? כי כל כפולה של 2 היא מספר זוגי, ולעולם לא תיתן שארית 1 בחילוק ב-4. (ובמילים של "שעון": בכפולות של שני צעדים אפשר להגיע או לסיבובים שלמים על השעון, כלומר שוב ושוב ל-0, או לסיבובים שלמים בתוספת שני צעדים, כלומר ל-2.)

<u>סעיפים ג ו-ד</u> מיועדים להוביל את התלמידים – ולו במידה חלקית - אל המסקנה: בחשבון שאריות, למספרים שהם זרים למחלק (כלומר אין להם ולמחלק גורם משותף חוץ מ-1) ורק להם, יש הופכי. לכן בקבוצות שהמחלק שלהן ראשוני (מודולו 3, מודולו 5 ומודולו 7) לכל המספרים חוץ מ-0 יש הופכי, ואילו בקבוצות שהמחלק שלהן אינו ראשוני (מודולו 4, מודולו 6, מודולו 8, מודולו 9 ומודולו 10) אין הופכי למספרים שאינם זרים למחלק (כלומר יש להם ולמחלק גורם משותף). לדוגמה: במודולו 10 אין הופכי למספרים 2, 4, 5, 6 ו-8.

בסעיף ג הם יבדקו קבוצות שונות של שאריות וינסו לאפיין באילו מקרים אין הופכי, ובסעיף ד הם ינסו ליישם את מסקנותיהם לקבוצת מודולו 12 ויבדקו את עצמם באמצעות לוח הכפל המתאים. יש להניח שהם ימצאו שלמספרים 2, 3, 4, 6, 8, 9 ו-10 אין הופכיים מודולו 12.

ד. פתרון למשוואה $3\times_{?} n = 1$ הוא המספר ההופכי של 3. ל-3 יש הופכי בקבוצות שהמחלק שלהן זר ל-3, כלומר מודולו 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19 ו-20.

ה. ראשית, המשוואה הזו מתקיימת רק בקבוצות השאריות מודולו 6 ומעלה – כי באחרות לא קיים המספר 5.

בכל קבוצת שאריות המספר 0 הוא פתרון של המשוואה $3\times_{?} n = 5\times_{?} n$.

כדי למצוא פתרון נוסף התלמידים יכולים לחפש בלוחות רבים ממודולו 6 ומעלה, או לצמצם את החיפוש ללוחות "חשודים". השיקול המוביל ללוחות האלה אינו פשוט, ולא בכל כיתה יש טעם להעלות אותו. השיקול הוא זה: אם יש פתרון נוסף למשוואה - זהו מספר שאין לו הופכי באותה קבוצה (כי אילו היה אפשר היה לכפול את שני האגפים בהופכי ולקבל 3=5, וזה לא מתקיים בשום קבוצת שאריות!) כלומר יש לחפש רק בקבוצות שהמחלק שלהן איננו ראשוני.

כך או כך, התלמידים ימצאו שפתרון נוסף קיים רק בקבוצות שהמחלק שלהן זוגי. הפתרון במקרים האלה הוא מחצית מהמחלק. אנו נציג כאן שני הסברים אפשריים לכך. אנו משאירים לשיקול דעתכם מה מתוכם (אם בכלל) להציג בכתה.

<u>הסבר על-פי השעון כ"ציר מספרים":</u> כל פתרון של המשוואה הזו הוא מספר שאם "צועדים אותו" על השעון 3 פעמים או 5 פעמים – מגיעים לאותה נקודה. במילים אחרות, אחרי ש"צעדנו אותו" 3 פעמים, אם נצעד עוד פעמיים או שנישאר באותה נקודה (ואז המספר הוא 0) או שנחזור לאותה נקודה, וזה אומר שפעמיים המספר הזה - זהו המחלק, כלומר המספר הוא מחצית מהמחלק. אם כך פתרון נוסף קיים בקבוצות שהמחלק שלהן זוגי. הפתרון במקרים האלה הוא מחצית המחלק.

<u>הסבר על-פי פעולות על אגפי המשוואה:</u> אם נחסר משני אגפי המשוואה $3\times_? n$ (בחיסור מודולו המחלק) נקבל את המשוואה $2\times_? n=0$. מכאן שבחשבון "רגיל" $2\times_? n$ חייב להיות שווה למחלק (הוא לא יכול להיות כפולה אחרת של המחלק כי n קטן מהמחלק וחיובי).