שבילים למצוינות

מטח המרכז לטכנולוגיה חינוכית

מדריך למורה ליחידה א - משחקים במספרים

ביחידה זו יערכו התלמידים היכרות עם המושג **אסטרטגיה** ועם תחום [תורת המשחקים] – אחד התחומים השימושיים ביותר (והרווחיים ביותר) במתמטיקה. מומלץ להיכנס לקישור ולקרוא מעט על תחום זה לפני העברת הפעילות.

משך הפעילות: 1-2 שיעורים

הפעילות מזמנת לתלמידים חוויית משחק ולמידה. יש לחלק את התלמידים לזוגות, לאפשר להם לשחק לפחות פעמיים ולנתח יחד את המשחק. לאחר המשחק אפשר לצרף 2-3 זוגות לעבודה קבוצתית.

בסיום השיעור אפשר לנהל דיון במליאה, ובו יציגו הקבוצות את המסקנות ואת התשובות שלהן.

אם הפעילות אינה מסתיימת בשיעור אחד, מומלץ לתת לתלמידים חומר למחשבה עד לשיעור הבא.

משחק "המירוץ ל-60"

משימה 2 (עמ' 4)

במשחק זה ינצח שחקן א בשלב השישי.

7, 12, 20, 23, 25, 28, 37, 44, 48, 54, 60

מספר השלב	1	2	3	4	5	6			
שחקן א	7	+8 (20)	+2 (25)	+9 (37)	+4 (48)	+6 (60)			
שחקן ב	+5 (12)	+3 (23)	+3 (28)	+7 (44)	+6 (54)				

משימה 3 (עמ' 4)

א. סדרת הסכומים: 8, 13, 21, 26, 34, 39, 47, 52, 60 - במשחק זה ינצח שחקן א.

ב. סדרת הסכומים: 1, 8, 10, 17, 20, 27, 31, 38, 43, 50, 56, ???

האם יהיה מנצח במשחק? אם שחקן ב יתמיד באסטרטגיה שלו, הוא יכתוב בשלב הזה 63, והמשחק יימשך הלאה ללא מנצח. לעומת זאת, אם שחקן ב יתעשת ברגע האחרון וישנה את האסטרטגיה, הוא יכול לכתוב כעת 60 ולנצח. אבל אם שחקן א יתעשת לפניו, גם הוא יכול לשנות את האסטרטגיה במהלך המשחק ולנצח (למשל אם יכתוב 40 במקום 43).

ג. גם במשחק הזה, אם כל אחד מהשחקנים ידבק באסטרטגיה שלו, לא יהיה מנצח. השאלה היא אם מישהו מהם יתעשת וישנה את האסטרטגיה בזמן, ומי מהם יתעשת ראשון...

ד. באסטרטגיה זו שחקן ב אינו יכול לנצח, כי 60 אינו מתחלק ב-7. כדי לוודא ששחקן א אכן מנצח במשחק, די להבין שההפרש בין המספרים שהוא כותב אינו יכול לעלות על 12 (5+7), לכן הוא יכתוב בוודאות את אחד מהמספרים 50, 55, 60, ובכל אחד מהמקרים האלה ינצח.

סדרת הסכומים: 5, 7, 10, 14, 15, 21, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 45, 49, 50, 56, 60 .

משימה 4 (עמ' 5)

א. ...7, 11, 18, 22, 29, 33, 40, 44, 51, ???, ???

שחקן א כותב 7 בשלב הראשון ומוסיף 7 בכל שלב. שחקן ב מוסיף 4 בכל שלב.

לגבי המנצח, ראו סעיפים ב ו-ג בשאלה 3.

ב. ...2, 3, 6, 8, 12, 15, 20, 24, 30, 35, 42, 48, 56, ???

שחקן א כותב 2 בשלב הראשון, מוסיף 3 בשלב השני, מוסיף 4 בשלב השלישי וכן הלאה.

שחקן ב מוסיף בכל שלב מספר הקטן ב-1 מהמספר שהוסיף שחקן א.

לגבי המנצח – כמו בסעיף א.

ג. ...1, 8, 10, 16, 19, 24, 28, 32, 37, 40, 46, 48, 55, ???, ???

שחקן א כותב 1 בשלב הראשון, מוסיף 2 בשלב השני, 3 בשלב השלישי וכן הלאה.

שחקן ב כותב בכל שלב את המספר הקטן ביותר כך שהסכום יתחלק ב-8.

שחקן ב בוודאי אינו יכול לנצח (אם לא ישנה אסטרטגיה), כי 60 אינו מתחלק ב-8. אם שחקן א לא ישנה את האסטרטגיה – לא יהיה מנצח במשחק.

משימה 5 (עמ' 5)

א. שחקן א יכול לכתוב במהלך המשחק את המספרים הנתונים: אם בשלב הראשון הוא כותב את המספר 1, ושחקן ב חייב להוסיף מספר מ-1 עד 9 – הסכום שיתקבל יהיה בין 2 ל-10; לכן בשלב השני שחקן א יוכל לכתוב 11 בכל מקרה. שוב יצטרך שחקן ב להשלים לסכום שבין 12 ל-20 ושחקן א יוכל לכתוב 21, וכן הלאה.

העיקרון: בכל שלב שחקן א משלים לסכום הגדול ב-10 מהמספר הקודם שכתב.

ב. באותו האופן שחקן א יכול לכתוב סדרות מספרים נוספות: אם בשלב הראשון יכתוב 5, יוכל לכתוב בשלבים הבאים את הסכומים האלה:

.5 , __, 15, __, 25,__, 35,__,45,__, 55

ג. לפי העיקרון המתואר בסעיפים א-ב אי-אפשר לבנות אסטרטגיה מנצחת לשחקן א: כדי להגיע ל-60 השחקן צריך להתחיל מכפולה של 10, אך לפי החוקים עליו להתחיל ממספר בין 1 ל-9.

קשה להוכיח ישירות שלא קיימת בכלל אסטרטגיה מנצחת לשחקן הראשון. אחרי שהלמידים ינסו להוכיח זאת – כדאי להציע להם להניח לכך ולחזור לעניין אחרי הסעיף הבא.

ד. לשחקן ב יש אסטרטגיה מנצחת ללא תלות בשלבים של שחקן א: בכל שלב הוא משלים מספר לסכום המתחלק ב-10 : 60 ,__,50,__,40 ,__,30 ,__,20 ,__ ,10 ,__.

בשלב הראשון שחקן א כותב מספר מ-1 עד 9 , ושחקן ב משלים לסכום 10.

שחקן א מוסיף מספר מ-1 עד 9, ולכן הסכום הוא מ-11 עד 19, ושחקן ב משלים ל-20 וכן הלאה.

עכשיו אנו יכולים לענות גם על סעיף ג: כאשר לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת, הרי ששחקן ב יפסיד בוודאות, ולכן לא ייתכן שלשחקן ב תהיה אסטרטגיה מנצחת.

משנים את מספר היעד

משימה 6 (עמ' 5)

- אם המספר הסופי הוא 50 (במקום 60), שחקן ב יכול להשתמש באותה אסטרטגיה מנצחת שתיארנו במשימה 5ד: בכל שלב הוא יכול לכתוב סכום המתחלק ב-10.

- אם המספר הסופי הוא 65 (במקום 60), לשחקן א יש אסטרטגיה מנצחת. סדרת הסכומים שלו תהיה: 5 __, 15, __, 25,__, 35,__,45,__, 55, __, 65

משנים את טווח המספרים

משימה 7 (עמ' 5)

א. אם בכל שלב מותר לכתוב מספרים מ-1 עד 8, לכל שחקן יש אפשרות לכתוב סכום הגדול ב-9 מהמספר הקודם שכתב. כדי למצוא באיזה מספר כדאי להתחיל בשלב הראשון, יש "ללכת אחורה" בצעדים של 9:
6, __, 15, __, 24,__, 33,__,42,__, 51,__,60
זוהי אסטרטגיה מנצחת עבור שחקן א.

ב. אם המספרים שמותר להוסיף הם מ-1 עד n, כל שחקן יכול לכתוב סכום הגדול ב-(n+1) מהסכום הקודם שכתב. **אם בסוף המשחק צריך להגיע למספר המתחלק ב-(n+1), אז לשחקן ב יש אסטרטגיה מנצחת**: בכל שלב הוא כותב סכום המתחלק ב-(n+1) - כך קורה במשימה 1 ובמשימה 2, כאשר המספר הסופי הוא 50 או 60. **אם בסוף המשחק צריך להגיע למספר המתחלק ב-(n+1) עם שארית**, **אז לשחקן א יש אסטרטגיה מנצחת:** בתחילת המשחק הוא כותב מספר השווה לשארית החילוק ב-(n+1), ואחר כך בכל שלב הוא כותב מספר המתחלק ב-(n+1) עם אותה שארית.
למשל: אם המספר הסופי הוא 75, ובכל שלב אפשר להוסיף מספר מ-1 עד 12,המספר 75 מתחלק ב-13(12+1) עם שארית 10.
האסטרטגיה המנצחת של שחקן א היא : 75 ,__62, ,__49, ,__36, ,__ 23, ,__ , 10.
שימו לב: כל הסכומים של שחקן א מתחלקים ב-13 עם שארית 10.
<u>הצעת הפעלה</u>: ניתן לחלק את התלמידים לכמה קבוצות, כאשר כל קבוצה הוחנת משחק אחר, ומוצאת בו אסטרטגיה מנצחת. לאחר שכל קבוצה מציגה את האטשטרטגיה שלה, אפשר לבקש מהם למצוא עקרונות המשותפים לכל המשחקים, ודרך כך להגיע להכללה..

משחק משלכם

משימה 8 (עמ' 5)

את האפשרויות של שינוי המספר הסופי (למשל, מ-60 ל-65) או שינוי המספר הגדול ביותר שאפשר להוסיף בכל שלב (למשל 8 במקום 9) כבר בדקנו בסעיפים הקודמים. אפשרות אחרת שיכולה לעלות בכיתה היא שינוי המספר **הקטן ביותר** בטווח המספרים שאפשר להוסיף בכל שלב. נבחן מקרים כאלה:

אם טווח המספרים המותר הוא בין 4 ל-9, הרי בכל שלב כל שחקן יוכל להשלים לסכום הגדול ב-13 מהסכום הקודם שכתב, וניתן למצוא אסטרטגיה לפי המתואר בשאלה הקודמת.

לעומת זאת, אם טווח המספרים הוא בין 0 ל-9 או בין (-1) ל-9 למשל, ייתכן שהמשחק לא יוכל להסתיים.
למעשה, אם שני השחקנים מיומנים, המשחק אכן לא יסתיים, משום שאם שחקן א יאפשר לסיים את המשחק, שחקן ב ינצח.

עוד משחקים אפשריים: משחק על לוח דו-ממדי שאפשר לבצע בו מספר צעדים ימינה או למעלה;
הוספת שברים למספרים המותרים, ובפרט שברים עם מכנים שונים וכדומה.

נשמח אם תשתפו אותנו ברעיונות נוספים למשחקים שיעלו בכיתה ונוכל להוסיף אותם לאתר התכנית.