סדרת פיבונצ'י - מדריך

משך הפרק 10 שעות

המלצות כלליות לפעילות

לאחר הצגת הנושא, בעזרת דוגמאות מהפעילות הראשונה, ניתן לתת לתלמידים לעבוד בקבוצות.
חשוב לעודד דיונים קבוצתיים והשוואת פתרונות שונים.
סביר כי תלמידים שונים יציעו אפשרויות שונות לפתרון. חשוב שהם יבינו, שאין לפסול אף הצעה לפני שבודקים את התאמתה לתיאור.
במקרה שתלמידים לא יודעים כיצד להתחיל את הפתרון, אפשר לנתח יחד אתם את דרישות המשימה. כאשר יש חופש בקביעת הפתרון - כלומר יש יותר מתשובה אפשרית אחת - כדאי לעורר דיון ב"דרגות החופש", כלומר למה בדיוק יש חופש. (למשל, כאשר מתוארת סדרה באמצעות כלל נסיגה ולא מתואר האיבר הראשון – יכולות להיות סדרות מתאימות רבות: כל נקודת התחלה תוביל לסדרה אחרת.)
העיסוק בסדרות בפעילויות אלה אינו כולל שימוש באינדקסים. תיאורי האיבר הכללי יכולים להיות מילוליים או אלגבריים, אבל הם יתייחסו ל"איבר במקום ה-n" או ל"איבר כלשהו בסדרה" ולא ל-a_n.

פעילות א: סדרות וחוקיות

התלמידים מתבקשים להמשיך סדרות מגוונות ואף לאפיין את החוקיות שלהן.
ייתכן שתלמידים יציעו "פרשנות" שונה מזו שאנו מציגים כאן - ויש לבדוק אתם אם החוקיות שהציעו מתאימה לאיברים הנתונים. כדאי לדון בכיתה באפשרויות השונות להסברים.
תוך כדי הפעילות כדאי להפנות את תשומת לבם של התלמידים לכך שבמקרים מסוימים נוח יותר לאפיין סדרה באמצעות תיאור המעבר מאיבר לאיבר (תיאור שהוא למעשה מעין "כלל נסיגה מילולי") ובמקרים מסוימים דווקא נוח יותר לאפיין איבר לפי מקומו (מעין "נוסחת מפורשת" של האיבר הכללי). תיאור החוקיות יכול להיות באמצעות ביטוי אלגברי או תיאור מילולי (וגם כאן כדאי לשים לב שלפעמים אחד מהם נוח יותר מהאחר).

סעיף	המשך הסדרה	האיבר העשירי	האיבר שבמקום ה-120	מציאת האיבר הבא לפי הקודם	מציאת איבר לפי מקומו
א.	…22222, …222222	2222222222	מספר המורכב מ-120 ספרות 2	בכל שלב מוסיפים ספרה 2 למספר הקודם	n פעמים הספרה 2
ב.	$\ldots\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\ldots$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{120}$		$\frac{1}{n}$; כל איבר בסדרה הוא שבר שהמונה שלו 1 והמכנה שווה שמקום בסדרה (n).
ג.	-100, -150	-350	100-50•119= -5850	כל מספר קטן מקודמו ב-50.	150-50n
ד.	1.4, 1.8, 2.2	3.4	$-0.2+0.4\cdot 119=47.4$	כל מספר גדול מקודמו ב-0.4.	-0.6+0.4n
ה.	…-1, 1, …	1	1	בכל מספר הסימן הפוך מהסימן של המספר הקודם.	$(-1)^n$; במקומות הזוגיים: 1, במקומות האי-זוגיים: -1
ו.	…5, -6…	-10	-120	הוספת 1 לערך המוחלט והיפוך הסימן.	$(-1)^{n+1}n$; אם n זוגי: -n אם n אי-זוגי: n
ז.	…4, 4 …	4	4	כל איבר שווה לקודמו.	4, ללא תלות ב-n.
ח.	…2, 0…	0	0	0 אם הקודם הוא 2, 2 אם הקודם הוא 0.	$1-(-1)^n$; בכל מקום זוגי בסדרה נמצא 0 ובכל מקום אי-זוגי נמצא 2.
ט.	$\ldots \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \ldots$	$\frac{10}{11}$	$\frac{120}{121}$	$\frac{a}{b}\to\frac{a+1}{b+1}$	$\frac{n}{n+1}$; כל איבר בסדרה הוא שבר שהמונה שלו שווה למקום האיבר בסדרה והמכנה שלו גדול מהמונה ב-1.
י.	…16, -32…	-512	$(-2)^{119}$	כופלים את המספר הקודם ב-(-2)	$(-2)^{n-1}$
יא.	סדרת המספרים הראשוניים	29			

פעילות ב: בונים סדרות

זוהי פעילות הפוכה לפעילות הקודמת: כאן נתונה תכונה של הסדרה – ברוב המקרים החוקיות של הסדרה - והתלמידים צריכים לבנות על פיה את הסדרה. התכונה נתונה בצורות שונות – מילולית, אלגברית או שילוב ביניהן. בתיאורי החוקיות יש לשים לב לאבחנה בין שני סוגי תיאורים:

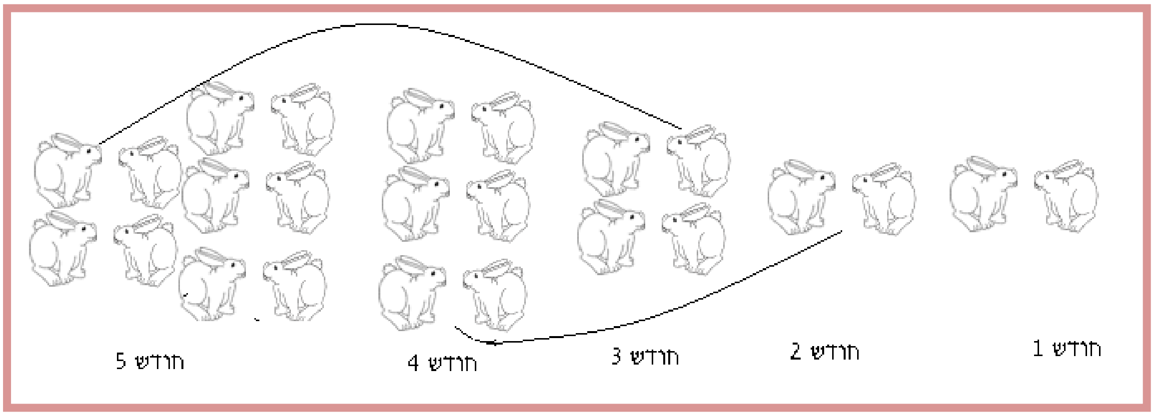
כלל למציאת האיבר הכללי לפי מקומו, וכלל למציאת האיבר הכללי לפי קודמו. התלמידים יתנסו כאן בכך שתיאור לפי איבר קודם מגדיר סדרה מסוימת רק אם צוין האיבר הראשון בסדרה (ולפעמים כמה ראשונים). התיאור בסעיף ו ("כל איברי הסדרה הם זוגיים") הוא תיאור של תכונה כללית יותר, והוא מתאים כמובן לאינספור סוגי חוקיות וסדרות שונות ומשונות כיד הדמיון.

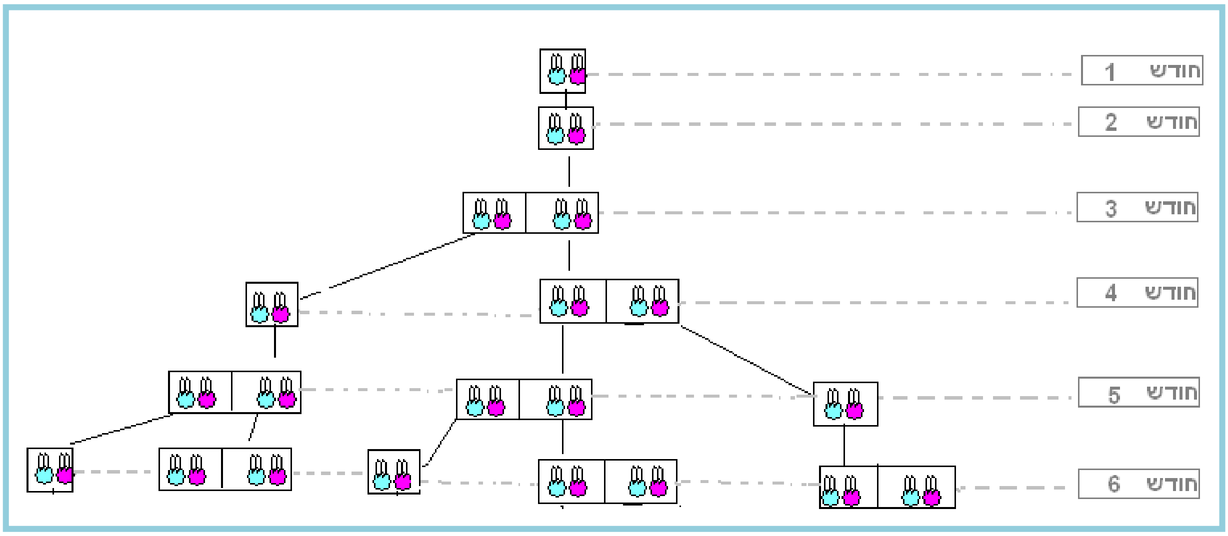
פעילות ג: חידות וסדרות

חידה 1: כמה ארנבות?

יש לעודד את התלמידים למצוא דרכים משלהם – גרפיות או אחרות – לבדוק מה קורה במהלך החודשים הראשונים של חיי הארנבים.

דוגמאות:

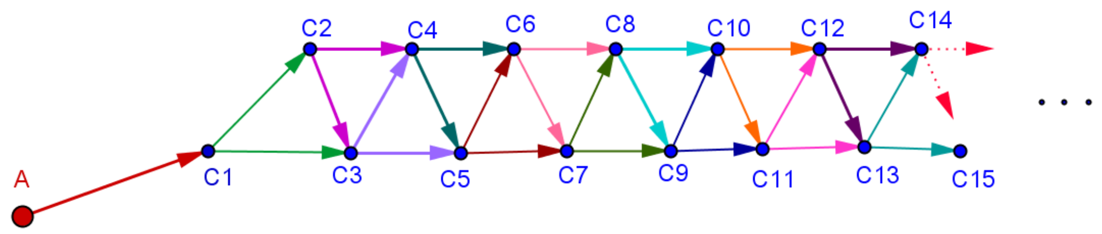




התלמידים אמורים לגלות שבכל חודש ישנם כל הזוגות שהיו בחודש שעבר, ובנוסף כל הזוגות החדשים שנולדו בחודש זה. וכמה זוגות נולדו בחודש זה? כל זוג שהוא כבר בן חודשיים ומעלה ממליט זוג חדש. כלומר, מספר הזוגות החדשים כמספר הזוגות בני חודשיים ומעלה – במילים אחרות, מספר הזוגות שהיו קיימים לפני חודשיים. לכן מספר הזוגות בחודש הוא סכום המספרים שהיו קיימים בשני החודשים הקודמים. מכאן התכונה של הסרה שכל איבר הוא סכום שני האיברים הקודמים לו.

יש לשים לב לסוג התיאור של החוקיות: קל לחשב כל איבר על סמך האיברים הקודמים. הרבה יותר מסובך לחשב איבר על פי מקומו בסדרה, ובשלב זה התלמידים כלל אינם מסוגלים לכך.

חידה 2: בכמה דרכים ניתן להגיע? (באדיבות דר' רוזה לייקין)



לכל עיר החל מ-c3 אפשר להגיע בשני כבישים: בכביש מהעיר הקודמת ובכביש מהעיר שלפני העיר הקודמת; לכן מספר הדרכים להגיע לעיר כלשהי הוא סכום המספרים של הדרכים להגיע לשתי הערים הקודמות. לכן שוב כל מספר הוא סכום של שני קודמיו.

יש לשים לב ששני האיברים הראשונים בסדרה זו זהים לשני האיברים הראשונים בחידת הארנבים , לכן שוב מתקבלת אותה סדרה.

חידה 3: עולים במדרגות

גם כאן אפשר להגיע לכל מדרגה (מהשנייה ואילך) משני מקומות: מהמדרגה שלפניה ומהמדרגה שלפני זו שלפניה. לכן שוב מספר הדרכים להגיע למדרגה הוא סכום מספרי הדרכים להגיע לשתי קודמותיה.

יש לשים לב שכאן שני האיברים הראשונים הם 1 ו-2 (ולא 1 ו-1 כמו בחידות הקודמות), לכן לא מתקבלת אותה סדרה אלא סדרה דומה בהזזה של מקום אחד.

חידה 4 : שורת כרטיסים

הפתרון דומה מאוד לחידה 3 ומתקבלת אותה סדרה.

☜ **בדיון המסכם** יש לשים לב לכך שמתקבלת אותה חוקיות בארבע הסדרות, אבל לא מתקבלות אותן סדרות בגלל ההבדל באיברים הראשונים.

לגבי המציאותיות של המצבים – ברור שחוץ מהחידה הרביעית כל המצבים אינם מציאותיים (כל ארנב מת אי-פעם; ההמלטה אינה לפי דפוס קבוע ובוודאי לא בזוגות זכר-נקבה; אין עיר שבנויה בצורה כל כך מטופשת ושאין בה דרך חזרה הביתה; גם הערים במדינה וגם המדרגות לעולם אינם אינסופיים וכו') אבל תיאורי מצבים מופרכים מסייעים להמחיש מצבים מתמטיים שיש בהם עניין מתמטי נטו.

☜ הפעילות שאחרי הדיון המסכם מיועדת להתנסות והיכרות עם מספרי סדרת פיבונצ'י ולהתנסות בשימוש ביישומון הזה.

פעילות ד: סדרת פיבונצ'י במציאות

1. בתיאור אילן היוחסין יש לשים לב שהסדרה מתקדמת אחורנית בזמן:
האיבר הבא בסדרה מתאר את **הדור הקודם** באילן היוחסין.

כיוון שלכל זכר יש רק אם, מספר הזכרים בדור מתאים למספר הנקבות בדור הבא (שהוא האיבר **הקודם** בסדרת הנקבות), ואילו מספר הנקבות בדור מסוים מתאים למספר הצאצאים שיש בדור הבא (כלומר לאיבר **הקודם** בסדרת ההורים).

מספר ההורים בדור הוא כמובן סכום המספרים של הזכרים והנקבות באותו דור.

מספר הנקבות באותו דור הוא האיבר הקודם בסדרת ההורים, ומספר הזכרים הוא האיבר הקודם בסדרת הנקבות שהוא המספר שלפני-הקודם בסדרת ההורים. ולכן בסדרת ההורים כל מספר הוא סכום שני האיברים הקודמים.

בעזרת הצביעה בטבלה שלפניכם אפשר לראות ששלוש הסדרות הן הזזת-מקום זו של זו, לכן החוקיות שלהן היא אותה חוקיות והן נבדלות זו מזו רק באיברים הראשונים.

מספר הדור הקודם לזכר	מספר הזכרים	מספר הנקבות	מספר ההורים הכולל
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21

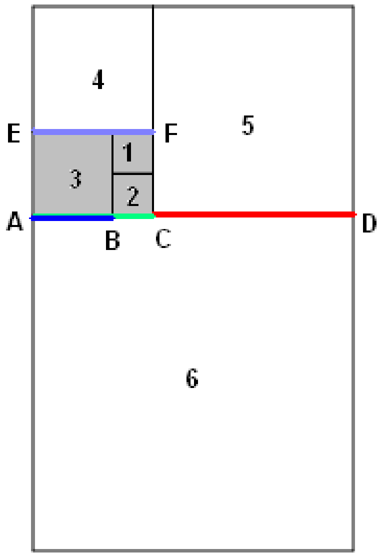
2. אכן, בפרחים רבים מספר עלי הכותרת הוא מספר מסדרת פיבונצ'י. ואם אכן כאשר המספר איננו מספר פיבונצ'י הוא **תמיד** סכום של שני מספרי פיבונצ'י – זהו אכן מידע מעניין. אבל אם הטענה היא שהוא בד"כ סכום של שני מספרי פיבונצ'י – הרי זו טענה בלתי מעניינת כלל, כיוון שבין המספרים עד 20 יש רק שלושה שאינם סכום של **שני** מספרי פיבונצ'י (והרי ברוב הפרחים אין יותר מ-20 עלי כותרת!).
לגבי טענתה של נועם: לא, לא כל מספר טבעי הוא סכום של שני מספרי פיבונצ'י, אבל כל מספר טבעי ניתן להצגה כסכום של מספרי פיבונצ'י שונים (לאו דווקא שניים) שאין ביניהם שניים סמוכים. זהו משפט מוכח בתורת המספרים. (ההוכחה היא באינדוקציה ואיננה מתאימה לתלמידים בשלב זה.)

***

רבים מייחסים לתופעות טבע שונות תכונות הקשורות לסדרת פיבונצ'י. בחלק מהמקרים המידע מעניין מאוד – ובחלק מהמקרים הקשר מאולץ. כדאי לעודד את התלמידים להתייחס בביקורתיות לטענות ולהשערות שונות!

פעילות ה: מלבן פיבונצ׳י וספירלת פיבונצ׳י

1. המספור בתוך המלבנים שבסרטוט זה מתאר את סדר הבנייה ולא את מאפייני הריבועים.
אם רושמים את אורך הצלע של כל ריבוע לפי סדר הבנייה – מתקבלת סדרת פיבונצ'י.
מדוע? לשם כך יש לבדוק על אילו צלעות נבנה כל ריבוע. את זה כדאי לעשות רק אחרי שבונים את המלבנים כמה שלבים הלאה, לפחות עד הריבוע השביעי.



יש להניח שהתלמידים יבדקו אם כל ריבוע נבנה על הצלעות של שני קודמיו. לא, הוא לא נבנה על הצלעות של שני קודמיו - הוא נבנה על הריבוע הקודם ושני הריבועים שלפני הריבוע הקודם.
למשל ריבוע 6 לא נבנה על צירוף הצלעות של ריבועים 5 ו-4 אלא על צירוף הצלעות של ריבועים 5, 3 ו-2 (ראו סרטוט); אבל התבוננות במלבן שהתקבל בשלב הקודם (מלבן במלבן AEFC) תראה שהצלע שמול AC היא EF, שהיא צלעו של ריבוע 4. אם כן על סמך תכונות המלבן ניתנת כאן אם כן משמעות גאומטרית (כפולה!) לכלל של סדרת פיבונצ'י:

$$a_n=a_{n-1}+\underbrace{a_{n-3}+a_{n-4}}_{a_{n-2}}=a_{n-1}+a_{n-2}$$

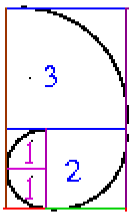
ג. סדרת ההיקפים של הריבועים היא כמובן סדרת מספרים הגדולים פי 4 ממספרי פיבונצ'י, וברור שהחוקיות בחישוב איבר על סמך האיברים הקודמים זהה לזו שבסדרת פיבונצ'י עצמה (על סמך חוק הפילוג).
השאלות בסעיפים השונים עוסקות בעיקר בריבועים המתקבלים בכל שלב. כדאי לעודד את התלמידים לדון גם במלבנים ולשים לב שבכל שלב מתקבל מלבן שצלעותיו הן שני מספרי פיבונצ'י סמוכים.

2. בסרטוט שבמשימה זו המספרים בתוך הריבועים אינם מתארים מקום הסידורי בסדרה אלא את אורכי הצלעות של הריבועים שהם מספרי פיבונצ'י.

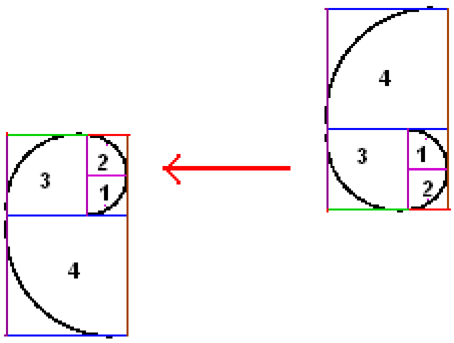
אפשר לדון עם התלמידים גם ברבעי העיגולים שמציירים בכל שלב ולשאול איפה נמצאים המרכזים שלהם. האם יש משהו מעניין בסדרת המרכזים ? איזה קו יתקבל אם נעביר עפרון בין המרכזים האלה לפי הסדר?

ג. יש שתי גי שות אפשריות (לפחות!) למשימה של בניית המלבנים כך שתתקבל ספירלה המסתובבת בכיוון ההפוך:

(1) אפשר לסרטט את הריבוע השלישי מימין לשני הריבועים הקטנים ואז המשך הבנייה יהיה בכיוון מנוגד לכיוון השעון:



(2) אפשר לסרטט את הריבוע השלישי משמאל לשני הראשונים אבל לפני כן להחליף את התפקידים של שני הריבועים הראשונים בסדרה (שהרי הם חופפים !). לשם כך כדאי לחזור ולמספר את הריבועים במספרים של מקומותיהם בסדרה תוך החלפת המספור של שני הריבועים הראשונים:



פעילות ו: חוקרים את סדרת פיבונצ'י

1. במשימה זו התלמידים צריכים להשתמש בכלל הנסיגה של סדרת פיבונצ'י באופן גמיש ולמצוא איברים לא רק לפי קודמיהם אלא גם לפי עוקביהם או בשילוב של השניים. לדוגמה, בסעיף א המספר 610 הוא הסכום של 233 ועוד מספר שמופיע בין שניהם לכן המספר הזה הוא ההפרש בין 610 ל-233; ובאותו אופן ניתן למצוא גם את האיבר הראשון ברביעייה.

א.

610	*377*	233	*144*

ב.

233	144	*89*	*55*

ג.

$m+k$	k	m	$k-m$

ד.

b	$b-a$	a	$b-2a$

ה.

x	y	$x-y$	$2x-y$

2. א. כל ההשערות המוצגות במשימה זו הן נכונות. כדי להגיע לנימוק כללי כדאי לדבר על שאריות של חלוקה בגורם המדובר ולראות את הקשר בין הכלל של סדרת פיבונצ'י לבין המחזוריות של השאריות האלה. כדאי כמובן להתעניין במחזורים הקשורים לתוכן הטענה.

לדוגמה, ההשערה השנייה היא: **כל מספר רביעי בסדרת פיבונצ'י הוא כפולה של 3.** אם כך כדאי לחלק את הסדרה למקטעים של 4 איברים ולהתבונן בשאריות החלוקה ב-3:

מקום בסדרה	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
איבר בסדרה	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
שארית החלוקה ב-3	0	2	1	1	0	1	2	2	0	2	1	1

סדרת השאריות מעניינת. כדאי מלעודד את התלמידים לזהות תופעות מעניינות שונות בסדרה זו. נדגיש כאן כמה תכונות: ראשית, אפשר לראות שבכל פעם שהשארית היא 0 – לפניה ואחריה מתקבלות שאריות שוות. שנית, ניתן לראות שאחרי איבר 0 בסדרה זו מופיעים שני איברים שווים. שלישית, ניתן לראות שהמקטעים באורך 4 הם משני סוגים המתחלפים לסירוגין: המקטע 1, 1, 2, 0 והמקטע 2, 2, 1, 0. אם הדפוס הזה חוזר על עצמו לכל אורך הסדרה – אז אכן כל איבר רביעי מתחלק ב-3. אם כך כדאי לחפש עם התלמידים את החוקיות בסדרת השאריות. האם יש כלל ברור שמתאר את החוקיות? כדאי לבחון איך מתקבלת כל שארית אם ידועות שתי הקודמות בלי קשר למקום המדויק בסדרה. מה יהיה האיבר הבא בסדרת השאריות אם שני הקודמים לו הם 1 ו-2? אם שני הקודמים הם 0 ו-1? 0 ו-2? במילים אחרות: כדאי להגיע לשיקולים של חשבון שאריות מבלי להשתמש במושג "חשבון שאריות".

אם התלמידים עסקו בשנה שעברה במשימה "חשבון שאריות" מתוך *שבילים למצוינות* לכיתה ז – הם יוכלו להבין בקלות שבסדרת השאריות מתקיים למעשה אותו כלל כמו בסדרת פיבונצ'י עצמה – אבל כמובן מודולו 3.

ב. בסעיף ב יש להבחין בין השאלה איזו מההכללות **מכלילה נכון** את ההשערות שהופיעו בסעיף הקודם לבין השאלה איזו מההכללות **נכונה כשלעצמה**. אמנם בשני המקרים מתקבלת אותה תשובה – אבל ההבחנה חשובה מאוד.

ההכללה של יובל איננה נכונה: הרי לפי הטענות כל איבר שלישי מתחלק ב-2, לא ב-3, וכל איבר רביעי מתחלק ב-3, לא ב-4. .

ההכללה של נורית נכונה: לפי הטענות כל איבר רביעי מתחלק ב-3 – והאיבר במקום הרביעי הוא 3; כל איבר שלישי מתחלק ב-2 – והאיבר השני הוא 2; וכו'.

כדאי לברר עם התלמידים מה עשוי לגרום לטעות כמו זו של יובל (התשובה היא כנראה העובדה שבאיבר החמישי המקום והאיבר מתלכדים: האיבר החמישי הוא 5.)

קל לראות שההכללה של יובל גם איננה מתקיימת. לגבי ההכללה של נורית: הכללה זו היא משפט מוכח לגבי סדרת פיבונצ'י, אבל ההוכחה רחוקה מלהתאים לתלמידים. הם יכולים רק לנסות אותה למספר רב של מחלקים ולהתרשם מהעקביות.

3. גם כאן הוצגה לתלמידים השערה שהיא משפט מוכח:

לשני איברים עוקבים בסדרת פיבונצ'י אין מחלקים משותפים גדולים מ-1.

נציע כאן הוכחה – הפעילו את שיקול דעתכם והיכרותכם עם תלמידיכם לפני שתציגו אותה בכיתה.
אפשר לשאול את התלמידים: אם לשני מספרים סמוכים בסדרה יש מחלק משותף – מה זה אומר על האיבר שלפניהם? כיוון שהאיבר שלפניהם הוא ההפרש ביניהם – גם הוא צריך להתחלק באותו מחלק. לדוגמה, אם שני האיברים מתחלקים ב-7 אפשר לראות שגם האיבר שלפניכם מתחלק ב-7:

...	7b	7a	7b-7a=7(b-a)	...

ואם כך – הרי גם האיבר שלפניו מתחלק ב-7, וכו'. ומשמעות הדבר היא שכל איברי הסדרה, גם הראשון, מתחלקים באותו מחלק – וזה כמובן לא ייתכן, כי 1 לא מתחלק בשום שלם אחר חוץ מ-1 עצמו.
בהסבר זה מופיעים גם שיקולים של רקורסיה וגם טיעונים על דרך השלילה, אבל בקבוצות חזקות ייתכן שניתן להתמודד עם שיקולים כאלה.

4. במשימה זו יש לשים לב לשני דברים:

מצד אחד יש להקפיד שתלמידים יבדקו את השערותיהם ביסודיות ועם זאת יימנעו מלהגדיר אותן כתקפות כל עוד הן מסתמכות רק על בדיקות של מקרים, רבים ככל שיהיו.

ומנגד, חשוב לעודד ניסיונות– פרועים ככל שיהיו - למציאת הכללות.

5. שימו לב שבמשימה זו איננו מבקשים כלל הנמקה לקיומם של הקשרים. המשימה של אפיון הקשרים וניסוחם בלי שימוש באינדקסים היא מאתגרת דיה...
בסעיף א התלמידים ימצאו שהריבוע של איבר בסדרה שווה למכפלת האיברים הסמוכים לו משני הצדדים ועוד או פחות 1 – תלוי בזוגיות של מקום האיבר בסדרה (ועוד למקומות האי-זוגיים, פחות לזוגיים).
בהחלט אפשר להפריד את התיאור לשני תיאורים נפרדים, למקומות הזוגיים ולמקומות האי-זוגיים.
סעיף ב קצת יותר קשה לניסוח: סכום הריבועים של כל איברי הסדרה עד המקום ה-n שווה למכפלת האיבר ה- n באיבר הבא אחריו.

6. משימה זו מעט יותר קשה מהקודמת: כאן התלמידים צריכים לפתור את התרגילים ולאפיין בדרך כלשהי את החוקיות בסדרה המתקבלת. החוקיות אינה פשוטה לתיאור: סכום הריבועים של שני מספרי פיבונצ'י סמוכים שווה למספר פיבונצ'י שמקומו הוא סכום המקומות של שני האיברים. בשפת האינדקסים: $a_n^2+a_{n+1}^2=a_{2n+1}$
אך כאמור אין צורך להגיע לניסוח מלא של החוקיות. אם התלמידים יזהו שכל המספרים המתקבלים הם מספרי פיבונצ'י – יפה. אם יזהו שאלה מספרי פיבונצ'י שבמקומות אי-זוגיים – יפה מאוד. אם יזהו שאלה המספרים שבמקומות האי-זוגיים על פי הסדר – מצוין.