

מדריך למורה ליחידה ב - סכום הספרות הסופי

משך הפעילות: 1-2 מפגשים

בפעילות זו יכירו התלמידים את סימן ההתחלקות ב-9 מזווית אחרת. הם יידרשו להסביר, ובמקצת המשימות - להגיע להכללות ולמסקנות.

סכום ספרות וסכום ספרות סופי

משימה 1 (עמ' 6)

א. 227232 (1) : $9=1+8$, $18=2+2+7+2+3+2$

(2) 6253 : $7=1+6$, $16=6+2+5+3$

(3) 345 : $3=1+2$, $12=3+4+5$

ב. (1) 9933 : סכום הספרות הסופי הוא 6.

(2) 123456789 : סכום הספרות הסופי הוא 9.

משימה 2 (עמ' 6)

א. דוגמאות: 617, 23

ב. דוגמאות: 99999999991, 55, 100

ג. רק למספר 0 סכום הספרות הסופי הוא 0. לכל מספר אחר סכום הספרות יהיה חיובי, סכום הספרות של סכום הספרות יהיה חיובי וכן הלאה. לכן סכום הספרות הסופי יהיה חיובי.

ד. סכום הספרות הסופי אינו יכול להיות 12 כי זהו מספר דו-ספרתי.

משימה 3 (עמ' 6)

א. ייתכן. למשל: 10101, 99

ב. לא ייתכן, כיוון שסכום הספרות הסופי הוא חד-ספרתי. לכל מספר רב-ספרתי סכום הספרות הסופי קטן ממנו, וסכום הספרות הסופי של מספר חד-ספרתי שווה למספר עצמו.

אם נרחיב את ההגדרה גם למספרים שליליים – זה ייתכן.

ג. ייתכן. כיוון שסכום הספרות הסופי הוא מספר הקטן מ-10, צריך לחפש מספר זוגי הקטן מ-20.

כמו כן הוא צריך להיות מספר דו-ספרתי – אחרת הוא יהיה שווה לסכום הספרות הסופי של עצמו.

המספרים המתאימים לשני התנאים האלה הם 18, 16, 14, 12. מביניהם - 18 מקיים את התנאי.

ד. ייתכן. לפי התשובה לסעיף הקודם, זה ייתכן כאשר סכום הספרות של המספר יהיה 18.

למשל: 99, 3456, 1111222233

ה. ייתכן. כל האפשרויות הן: 18 ו-36, 27 ו-54, 36 ו-72, 45 ו-90.

לדיון בכיתה (כהכנה לקראת המשימות הבאות): מדוע אלה כל הזוגות המתאימים לתנאי? מה משותף להם? נתין לשים לב שכל המספרים מתחלקים ב-9. אם ידוע לתלמידים כי סכום ספרות של מספר

מתחלק ב-9 כאשר המספר עצמו מתחלק ב-9, ניתן להסיק מכך כי סכום הספרות הסופי (שהוא תוצאה של חזרה על סכימת הספרות) יהיה 9 רק כאשר המספר המקורי יתחלק ב-9. אם כפל של מספר ב-2 אינו משנה את שארית החילוק ב-9 של המספר, הרי שהמספר עצמו חייב להתחלק ב-9, ולכן סכום הספרות הסופי שלו יהיה 9.

התחלקות וסכום הספרות - מהו הקשר?

משימה 4 (עמ' 7)

- א.** 25704 ו-990099 מתחלקים ב-9.
 הסבר אפשרי לסימן ההתחלקות: כל חזקה של 10 מתחלקת ב-9 עם שארית 1, למשל $10,000 = 9,999 + 1$. לכן את המספר 45678, למשל, אפשר לכתוב כך:

$$45678 = 4 \cdot (1 + 9999) + 5 \cdot (1 + 999) + 6 \cdot (1 + 99) + 7 \cdot (1 + 9) + 8 =$$

$$= 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + (4 \cdot 9999 + 5 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 7 \cdot 9)$$
 כיוון שהסכום בסוגריים מתחלק ב-9, שארית החילוק ב-9 של 45678 תהיה זהה לשארית החילוק ב-9 של $4+5+6+7+8=30$, שתהיה זהה (מאותה סיבה) לשארית החילוק ב-9 של $3+0=3$.
 לכן מספר מתחלק ב-9 אם ורק אם סכום הספרות הסופי שלו מתחלק ב-9. (שימו לב כי באותו האופן ניתן להסביר גם מדוע מספר מתחלק ב-3 רק אם סכום הספרות הסופי שלו מתחלק ב-3.)
- ב.** דוגמאות: 54, 99999, 444444444, 342, 765.
- ג.** $18 = 4+2+1+5+6$ - מתחלק ב-9, וכך גם כל מספר המורכב מאותן ספרות, כי סכום הספרות לא משתנה. כמה מספרים שונים אפשר לכתוב מאותן ספרות? ניתן לכתוב $5! = 120$ מספרים כאלה. זהו מספר הסידורים האפשריים – או [תמורות](#) - של חמישה איברים שונים.
- ד.** המספר 42156 מתחלק ב-2, כי הוא מסתיים בספרה זוגית.
 המספר 42156 מתחלק ב-3, כי סכום ספרותיו מתחלק ב-3 (כי הוא מתחלק ב-9).
 המספר 42156 מתחלק ב-6, כי הוא זוגי ומתחלק ב-3.
- כל המספרים הנוספים שכתבנו מתחלקים גם הם ב-3, כי אם מספר מתחלק ב-9, הוא מתחלק גם ב-3; אבל לא כל המספרים מתחלקים ב-2 וב-6, אלא רק המספרים המסתיימים בספרה זוגית.
- ה.** 1. כל צירוף של ספרות שסכומן מתחלק ב-3 עונה על הדרישה.
 2. כל מספר המורכב כמתואר ב-1 ומסתיים בספרה זוגית עונה על הדרישה.

משימה 5 (עמ' 7)

התלמידים יכולים לכתוב מספרים שונים בשורה הראשונה של הטבלה.

					דוגמה	
543,200	234	10,010	555,551	4,876	57,423	מספר רב-ספרתי a
14	9	2	26	25	21	סכום הספרות של a
5	9	2	8	7	3	סכום הספרות הסופי של a
5	0	2	8	7	3	שארית החילוק ב-9 של a

השערות שיכולות לעלות:

- סכום הספרות הסופי של כל מספר שאינו מתחלק ב-9 שווה לשארית החילוק ב-9 של המספר.
- שארית החילוק של כל מספר המתחלק ב-9 היא אפס, אך סכום הספרות הסופי שלו יהיה 9.

משימה 6 (עמ' 7)

ד. (1) סכום הספרות של המספר השתנה - הוא קטן ב-9.

(2-3) סכום הספרות **הסופי** לא השתנה, כי מספר העשרות בסכום הספרות קטן ב-1 ומספר היחידות גדל ב-1.

(4) **מסקנות אפשריות:**

1. כאשר ההבדל בין שני מספרים שונים הוא מספר הפעמים שמופיעה הספרה 9 - סכום הספרות הסופי של שני המספרים שווה. למשל: סכום הספרות הסופי של המספרים 958996 ו-5986 שווה.
2. אם מוחקים מהמספר המקורי את הספרה 0, סכום הספרות הסופי אינו משתנה.
3. אם מוחקים מהמספר המקורי ספרה השונה מ-9 ומ-0, סכום הספרות הסופי משתנה, כי שארית החילוק ב-9 משתנה.

4. במשימה זו ניתן דגש למבנה הלוגי של טענה: אם... אז....

- א. אם סכום הספרות הסופי של מספר הוא 9, אז המספר מתחלק ב-9. **נכון**, על סמך סימן ההתחלקות ב-9.
- ב. אם סכום הספרות של מספר הוא 9, אז המספר מתחלק ב-9. **נכון**
- ג. כל מספר המתחלק ב-9 סכום הספרות שלו הוא 9. **לא נכון. דוגמה: 99.**
- ד. כל מספר המתחלק ב-9 סכום הספרות הסופי שלו הוא 9. **נכון**, כי סכום הספרות הסופי הוא חד-ספרתי, והמספר החד-ספרתי היחיד המתחלק ב-9 הוא 9.

שימו לב להבדל בין ההיגדים ב-ג ו-ד. סכום הספרות הסופי הוא התוצאה של תהליך חוזר, שהסכום ב-ג הוא הצעד הראשון בו.

קסמים של 9

משימה 8 (עמ' 8)

בהמשך נכתוב את ההסברים המתמטיים לכל "קסם". שימו לב שאין טעם "ללמד" את ההסברים. המטרה היא לתת לתלמידים להגיע להסברים (אילו הרשומים כאן או אחרים) בעצמם. העבודה יכולה להיות בקבוצות (אולי קבוצה על כל קסם), ולאחר מכן בדיון במליאה.

א. קסם "נחשו את סכום הספרות"

כדאי לשוחח עם התלמידים על צורת הכתיבה של מספרים דו-ספרתיים באופן כללי.

בסעיף זה, אם המספר הגדול הוא $\overline{ab} = 10a + b$ והמספר הקטן הוא $\overline{ba} = 10b + a$,

אז ההפרש הוא $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$, ולכן המספר מתחלק ב-9, וסכום הספרות של ההפרש שווה

ל-9. (כדאי לבקש מהתלמידים לנמק מדוע סכום הספרות הוא חד-ספרתי!)

ב. שני קסמים "נחשו ספרה מחוקה"

(1)

דוגמה 2: 358	דוגמה 1: 572	רשמו מספר רב-ספרתי
$9666=27 \times 358$	$15444 = 27 \times 572$	כפלו אותו ב-27
$9729=9666+63$	$15507=15444+63$	חברו 63
9729	15507	מחקו ספרה כלשהי
9, 2, 7	אמרתי: 0, 1, 5, 7	קראו את הספרות שנותרו בסדר חופשי
9 או 0	5	נחשו את הספרה שנמחקה

המספר שהתקבל אחרי כפל ב-27 וחיבור של 63 מתחלק ב-9, לכן סכום ספרותיו מתחלק ב-9.

כדי לנחש את הספרה שנמחקה, צריך לחשב את סכום הספרות שנותרו ולהסיק איזו ספרה יש להוסיף כך שהסכום יתחלק ב-9.

בדוגמה 1 הנתונה: $13=7+5+1+0$. יש להוסיף 5, כי אז הסכום $18=13+5$ מתחלק ב-9.

שימו לב! אם סכום הספרות הנותרות כבר מתחלק ב-9, אז יש שתי אפשרויות:

נמחקה הספרה 0 או הספרה 9 (ראו דוגמה 2 בטבלה).

(2)

רשמו מספר רב-ספרתי בעל ספרות שונות	דוגמה 1: 3571	דוגמה 2: 7851
רשמו מספר אחר בעל אותן ספרות	5173	5781
חסרו את המספר הקטן מהמספר הגדול	$1602=5173-3571$	$2070=7851-5781$
מחקו ספרה כלשהי	1602	2070
קראו את הספרות שנותרו בסדר חופשי	2,1,0	2,0,7
נחשו את הספרה שנמחקה	6	9 או 0

סכום הספרות של שני המספרים המורכבים מאותן ספרות הוא שווה, ולכן גם שארית החילוק ב-9 של שני המספרים שווה. מכאן שההפרש בין שני המספרים בהכרח מתחלק ב-9. ההמשך כמו בקסם הקודם: כדי לנחש את הספרה שנמחקה צריך לחשב את סכום הספרות שנותרו ולנחש איזו ספרה יש להוסיף כך שהסכום יתחלק ב-9.

בדוגמה 1 הנתונה: $3=2+1+0$; יש להוסיף 6, כי אז הסכום $9=3+6$ מתחלק ב-9.

שימו לב! אם סכום הספרות הנותרות כבר מתחלק ב-9, אז יש שתי אפשרויות: נמחקה הספרה 0 או הספרה 9 (ראו דוגמה 2 בטבלה).

ג. קסם " נחשו את מספר הנעליים "

חיבור 72 למספר אינו משפיע על שארית החילוק ב-9, וגם כפל ב-19 אינו משפיע, כי $19n = n + 18n$.

לכן לאחר הפעולות האלו יתקבל מספר בעל אותה שארית חילוק ב-9.

השארית שווה לסכום הספרות הסופי שידוע לנו.

בהנחה שמספר הנעליים הוא אחד המספרים מ-36 עד 44 אפשר לדעת אותו. נקודה לדיון: יש אנשים עם

מספרי נעליים גדולים יותר או קטנים יותר, אך הסבירות לפגוש בהם היא קטנה. מה קורה אם נתקלים

באדם כזה? תשובה אפשרית (אל תגלו לתלמידים...) היא שקל לנחש לפי מידותיו אם גודל הנעליים שלו

הוא 36 או 45.

ד. כדאי להשאיר שאלה זו לעבודת עצמית של התלמידים. לתלמידים הצריכים תמיכה ניתן להציע לנסות לעשות וריאציות על המשחקים המוצגים בסעיפים הקודמים.
אפשרויות לדוגמה:
בקסם הראשון של סעיף ב אפשר לשנות את המספרים: במקום 27 ו-63 אפשר לכתוב מספרים אחרים המתחלקים ב-9.
בקסם השני של סעיף ב, במקום לחסר מספר רב-ספרתי בעל אותן ספרות אפשר לחסר מהמספר המקורי את סכום ספרותיו – ההפרש תמיד יתחלק ב-9.
בקסם שבסעיף ג אפשר להוסיף מספר אחר המתחלק ב-9, או לכפול במספר אחר ששארית החילוק שלו ב-9 היא 1, כגון 28 או 55.