ספרות ושאריות – הדרכה

משך הפעילות: 2 שיעורים.

פעילות זו מספקת הזדמנות לחזור אל חלק מסימני ההתחלקות (המוכרים לילדים מביץ הספר היסודי, אך ללא הנמקות) ולחפש להם נימוקים, או לפחות תובנות שיעזרו להבין מדוע הם מתקיימים. הפעילות מזמנת מסר וחוויה חשובים ומהותיים לאופייה של המתמטיקה: למרות מה שאולי נדמה לפעמים - זה לא הוקוס-פוקוס, הכול היגיון! הפעילות מתקשרת גם אל לוחות הפעולה בקבוצות השאריות, וגם בכך יש כדי לחזק את המסר שמתמטיקה אינה אוסף "טריקים" אלא דרך חשיבה שתוצריה מתקשרים זה לזה.

משימה 1: שארית החילוק ב-10

א. התלמידים יודעים כבר מזמן שמספר מתחלק ב-10 אם ספרת היחידות שלו היא 0. מה קורה כשספרת היחידות איננה 0? במספרים חיוביים ספרת היחידות היא שארית החילוק ב-10:

מספר	**13**	65**4**	**0**	272**7**	234**5**
שארית החילוק ב-10	3	4	0	7	5

ב+ג. המספרים שיכולים להתקבל כשארית של חילוק ב-10 הם המספרים מ-0 עד 9. זו ההזדמנות להזכיר לתלמידים ששארית של חילוק היא תמיד חיובית, לכן במספרים שליליים מציאת שארית החילוק ב-10 מעט יותר מורכבת מאשר בחיוביים: שארית החילוק של (7-) ב-10 איננה (7-) ואף לא 7, אלא דווקא 3: (-7)=(-1)X10+3. במילים אחרות: כמו בחיוביים, יש למצוא בכמה גדול המספר מכפולת 10 הגדולה ביותר שהיא **קטנה ממנו**.

ד. כאמור, השארית היא התשובה לשאלה בכמה גדול המספר מכפולת 10 הגדולה ביותר שהיא קטנה ממנו. טכנית, במספרים החיוביים מדובר בספרת היחידות של המספר, ובשליליים – בהפרש בין ספרה זו ל-10.

ה. גם לפני הפעילות הזו התלמידים לא היו מתקשים לומר שלמספרים 2234 ו-1004 למשל יש אותה שארית בחילוק ב-10, אולם רבים מהם היו טוענים שגם למספר 234- יש אותה שארית. בעקבות הסעיפים הקודמים מצופה מהם להבחין שהשארית של 234- בחילוק ב-10 היא דווקא 6, ואילו המספר 56- דווקא נמצא עם 2234 ו-1004 באותה קבוצה:

2234, 1004, -56   123, -777   56437, -43   9999, -11   -234, 246, 56 .

ו. ראינו בסעיפים הקודמים כי השארית בחילוק ב-10 שווה לספרת היחידות של המספר (או להפרש בינה לבין 10 במקרה של שליליים), ולכן השיטה הפשוטה ביותר לקבוע אם לשני מספרים יש אותה שארית בחילוק ל-10 היא להשוות בין ספרות היחידות שלהם.

ז. כדי לדעת מהי ספרת היחידות של מכפלה אין צורך לחשב את המכפלה. טכניקת הכפל המאונך מראה בבירור שספרת היחידות של המכפלה מתקבלת רק ממכפלת ספרות היחידות של שני הגורמים, ורק מספרת היחידות של מכפלה זו. וכיוון שספרות היחידות האלה הן גם שאריות חילוק ב-10 של הגורמים – די לכפול זה בזה את שאריות החילוק של שני הגורמים, וספרת היחידות שתתקבל היא שארית החילוק ב-10 של המכפלה כולה.

כדי להוביל את התלמידים למסקנה הזו ביקשנו מהם לחשב בכל סעיף גם את שאריות החילוק ב-10 של כל אחד מהגורמים וגם את שארית החילוק של המכפלה. אנא, אל תסתפקו בכך שהם ימצאו את הקשר – ודאו שהם מבינים את ההיגיון מאחוריו, או לפחות מפתחים תובנה כלשהי לגביו.

שארית החילוק ב-10	מכפלה		שארית החילוק ב-10	מכפלה
7	4) 2009×1943		2	1) 65464×87543
8	5) 181818×818181		5	2) 55555×33333
3	6) 34567×56789		1	3) 85467×34343

ח. אפשר להסתכל על לוח הכפל מודולו 10 כאילו המספרים בשוליים מייצגים את שאריות החילוק ב-10 של שני גורמים והתוצאה בתוך הלוח מייצגת את שארית החילוק ב-10 של מכפלת אותם שני גורמים. ההפתעה היא כמובן העובדה שמתקבלות אותן תוצאות בהסתכלות הזו ובתוצאה לפי חשבון השאריות שהגדרנו - בחיבור חוזר של הליכה על השעון.

כוונו את התלמידים לספק הסבר לקשר הזה. ניתן לנהל על כך דיון שבו התלמידים יבטאו את התובנות שלהם בעל-פה, אך לאחר מכן כדאי לבקש מהם לנסח את רעיונותיהם בכתב.

משימה 2: שארית החילוק ב-5

א. לא במקרה המספרים בסעיף זה הם אותם המספרים שהופיעו בסעיף **א** של המשימה הקודמת: יש טעם להשוות בין התוצאות. נציג את התשובות כאן כהמשך לטבלת התשובות שהצגנו במשימה הקודמת:

מספר	1**3**	65**4**	**0**	272**7**	234**5**
שארית החילוק ב-10	3	4	0	7	5
שארית החילוק ב-5	3	4	0	2	0

יש לוודא שהתלמידים מבינים את ההבחנה בין המספרים בשלוש העמודות הימניות למספרים בשתי השמאליות: כשספרת היחידות היא בין 0 ל-4 – שאריות החילוק ב-5 וב-10 זהות. כשספרת היחידות היא בין 5 ל-9 – שארית החילוק ב-5 קטנה ב-5 משארית החילוק ב-10. (כדאי לגרות את התלמידים לתת הסבר כלשהו להבחנה הזו.)

ב. שארית החילוק ב-5 נקבעת על פי ספרת היחידות. לשני מספרים אותה שארית אם לשניהם אותה ספרת יחידות, או אם ההפרש בין ספרות היחידות שלהם הוא 5.

ג. גם כאן המכפלות הן אותן מכפלות שהופיעו במשימה הקודמת, בסעיף **ז**, ונציג את התשובות כהמשך לטבלה הקודמת. גם כאן אפשר לראות שבשורות הצבועות שארית החילוק ב-5 איננה שווה לשארית החילוק ב-10 אלא קטנה ממנה ב-5.

שארית החילוק ב-5	שארית החילוק ב-10	מכפלה		שארית החילוק ב-5	שארית החילוק ב-10	מכפלה
2	7	4) 2009×1943		2	2	1) 65464×87543
3	8	5) 181818×818181		0	5	2) 55555×33333
3	3	6) 34567×56789		1	1	3) 85467×34343

ד. גם על לוח הכפל מודולו 5 אפשר להסתכל כאילו המספרים בשוליים מייצגים את שאריות החילוק ב-5 של שני גורמים, והתוצאה בתוך הלוח מייצגת את שארית החילוק ב-5 של מכפלת אותם שני גורמים.

ה. אתגר כדי למצוא את שאריות החילוק ב-5 של מנה אפשר למצוא את שאריות החילוק ב-5 של שני המספרים, ובין שתי השאריות לבצע חילוק מודולו 5. לדוגמה, בתרגיל 3: שארית החילוק ב-5 של המונה היא 1, ושל המכנה – 3. ההופכי של 3 מודולו 5 הוא 2, לכן:

$1:_5 3=1X_5 2=2$ ואכן, $437=\frac{101821}{233}$, ושארית החילוק ב-5 של 437 היא אכן 2

אפשרות אחרת: לעבור מהמנות למשוואות של כפל, ולבדוק מה יכולה להיות ספרת היחידות של כל מנה. לדוגמה, בתרגיל 1:

196992:____=342 ספרת היחידות של המספר החסר יכולה להיות 1 או 6.

בשני המקרים שארית החילוק ב-5 של ספרה זו תהיה 1. ואכן: $\frac{196992}{342}=576$

ושארית החילוק ב-5 של 576 היא אכן 1.

בכל אחת מהדרכים אפשר למצוא ששארית המנה בתרגיל 1 היא 3.

גם בחשבון "רגיל" וגם בחשבון השאריות החילוק הוא הפעולה ההפוכה לכפל. לכן, כיוון שהשארית של מכפלה בכפל "רגיל" זהה למכפלת השאריות בחשבון השאריות, כך יקרה גם עם תוצאות החילוק בשני סוגי החשבון: שאריות המנות בכל סעיף יהיו מנות השאריות המתאימות בחשבון השאריות.

הערה: ההסבר האחרון הוא הסבר מופשט ולא פשוט כלל. עם זאת, ייתכן שהוא מתאים לחלק מהתלמידים ואף עשוי להעשיר אותם. השאלה אם להציג בכיתה הסבר ברמת הפשטה כזו נתונה לשיקול דעתכם.

משימה3: שארית החילוק ב-9

א. התלמידים נתקלים כאן לראשונה בצורת כתיבה של מספרים שהיא נוחה במיוחד לעיסוק בשאריות. חשוב לוודא שהתלמידים מבינים מדוע שארית החילוק ב-9 של המספר $50005=5556\times9+1$ היא 1 ושארית החילוק ב-9 של המספר $17777=1975\times9+2$ היא 2. כדי להסיק מכאן מהי שארית החילוק ב-9 של המכפלה 50005×17777 אפשר להציג כל מספר במכפלה בהצגתו הארוכה ולהפעיל את חוק הפילוג.

ב.

מספר	30	20	10	71	34	67
שארית החילוק ב-9	3	2	1	8	7	5

ג. בעקבות המשימות הקודמות, יש להניח שהתלמידים ישערו שהם יכולים למצוא את שאריות החילוק ב-9 של כל גורם, לכפול שאריות אלה זו בזו ולמצוא את שארית החילוק ב-9 של מכפלה זו. יש לגרות אותם לחפש הסבר הגיוני לנכונות המסקנה הזו. אפשר לעשות זאת באמצעות חוק הפילוג, בעזרת ההצגה של מספרים כמו בסעיף **א**.

לדוגמה, בתרגיל 3:

71=7x9+**8**   20=2x9+**2**

לפי חוק הפילוג מכפלתם כוללת ארבעה מחוברים:

(7x9+8)x(2x9+2)

שלושה מהמחוברים בהכרח מתחלקים ב-9 (ולכן סכומם מתחלק ב-9) והרביעי הוא מכפלת המחוברים הימניים, שהיא מכפלת השאריות 2 ו-8, כלומר 16. שארית החילוק ב-9 של המכפלה הגדולה כולה שווה אם כן לשארית החילוק ב-9 של המספר 16, כלומר 7. נראה שאחרי הסבר כזה לא יקשה על התלמידים להבין את הקשר בין השאריות בסעיף זה ללוח הכפל מודולו 9.

בתרגיל 1 השארית היא 4, בתרגיל 2 השארית היא 3, בתרגיל 3 כאמור 7 ובתרגיל 4 – השארית 2.

ד. לאחר שהתלמידים יוכיחו שלכל חזקה של 10 שארית החילוק ב-9 היא 1, אפשר לדבר איתם על שארית החילוק ב-9 של כפולות של חזקות-עשר. לדוגמה, שארית החילוק ב-9 של 10X5=50 היא 1X5.

ה.

i. שארית החילוק ב-9 של $\underline{\mathbf{8}}\times10$ היא 8.

ii. שארית החילוק **ב-9 של** $\underline{\mathbf{4}}\times1,000$ היא 4.

iii. שארית החילוק ב-9 של **<u>7</u>**00 היא 7.

iv. שארית החילוק ב-9 של **<u>5</u>**0,000 היא 5.

(בכל המקרים יש כמובן אפשרויות נוספות. כדאי לעודד את התלמידים להציע אפשרויות שונות ולהמליל את תהליך החיפוש.)

ו. אפשר להיעזר במסקנת סעיף ג כדי להסיק שהשארית בתרגיל 1 שווה לשארית החילוק של 4+6=10, כלומר 1, והשארית בתרגיל 2 שווה לשארית החילוק של 4+6+5=15, ושארית זו שווה לסכום השאריות של 10 ושל 5, כלומר 6.

ו+ז. יש לזכור שהתלמידים למדו בבית הספר היסודי את סימן ההתחלקות ב-9, והשיקול של סכום הספרות אינו זר להם. רבים מהם בוודאי כבר יבינו בשלב זה ששארית החילוק של מספר ב-9 שווה לשארית החילוק של סכום ספרותיו ב-9, ומכאן גם ההצדקה של הכלל שלמדו בעבר ללא הנמקה.

ח. את השיטה התלמידים מכירים כאמור מלימודיהם הקודמים. כדי להסביר מדוע היא עובדת הם יכולים לתאר אותה כמקרה פרטי של מציאת השארית, שבו השארית היא 0.

משימה 4: שארית החילוק ב-3

א. השאריות האפשריות בחילוק ל-3 הן 0, 1 ו-2.

ב. אם מספר מתחלק ב-3 השארית שלו בחלוקה ל-9 יכולה להיות 0, 3 או 6 (במילים אחרות: שארית החילוק ב-9 מתחלקת ב-3). השארית בחלוקה ל-9 היא ההפרש בין המספר לכפולה הקרובה (מלמטה) של 9. אם השארית לא תתחלק ב-3, הרי שהמספר עצמו, שהוא הסכום של השארית עם הכפולה של 9, לא יתחלק ב-3.

ג. אם שארית החילוק של מספר מסוים ב-3 היא 2, אז השארית בחילוקו ל-9 יכולה להיות 2, 5, או 8 – כלומר מספרים שנותנים שארית 2 בחילוק ל-3. ניתן לראות זאת אם נחשוב על השארית בחילוק ל-9 כעל ההפרש בין המספר לבין הכפולה הקרובה (מלמטה) של 9 (שהיא גם כפולה של 3).

ד. שארית החילוק ב-3 של המספר מתקבלת מחילוק ב-3 של 7. השארית היא 1.

ה. התלמידים יכולים לפתור את השאלה או על ידי חישוב של שארית החילוק ב-9, או על ידי זיהוי הכפולה הקרובה של 3, לפי שיטת סכום הספרות שהם מכירים בוודאי משנים קודמות.

מספר	3,232	12,345	86,234	675,434	8,765,344	9,787,542
שארית החילוק ב-3	1	0	2	2	1	0

ו. הסימן הידוע להתחלקות ב-3 הוא שסכום הספרות מתחלק ב-3. כבר ראינו בסעיף **ב**, שמשמעות התנאי היא כי שארית החילוק ב-9 של סכום הספרות מתחלקת ב-3, וכפי שראינו בסעיפים קודמים, משמעות תנאי זה היא ששארית החילוק ב-9 של המספר עצמו מתחלקת ב-3, כלומר (שוב לפי סעיף **ב**) המספר עצמו מתחלק ב-3. זהו ההסבר לסימן ההתחלקות, שהתלמידים בוודאי הכירו כבר קודם.

משימה 5: שארית החילוק ב-11

א. שאריות החילוק ב-11 יכולות להיות כל אחד מהמספרים הטבעיים מ-0 עד 10.

ב.

מספר	18	54	61	80	99
שארית החילוק ב-11	7	10	6	3	0

ג. 100=99+1. שארית החילוק ב-11 של 100 היא 1.

ד.

מספר	1800	5400	6100	8000	9900
שארית החילוק ב-11	7	10	6	3	0

התלמידים אמורים להגיע למסקנה ששארית החילוק ב-11 לא משתנה כשכופלים מספר ב-100. לפי שיקול דעתכם ניתן לכוון אותם להצגה אלגברית $100x=99x+x$ או להציע להם אותה, ולדון בהשלכות שלה לגבי שארית החילוק ב-11 של מספרים מהקבוצה $100x$. ניתן גם לקיים מהלך של דוגמאות והכללה.

ה. שארית החילוק ב-11 של כל חזקה של 100 היא 1. ייתכן שהתלמידים יסיקו זאת מניסוי וטעייה או כמסקנה מהסעיף הקודם. ניתן לבחון את הסיבה לכך גם על ידי חיסור של 1 מחזקות של 100, וגם בדרך אלגברית: אם a ו- b מתחלקים ב-11 אז למכפלה $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$ תהיה שארית 1 בחילוק ל-11, כי כל המחוברים בביטוי מלבד 1 הם כפולות של 11.

ו. חשוב שהתלמידים ישימו לב שהמספר 100,000 איננו חזקה של 100. את שארית החילוק שלו ניתן להסיק מההצגה $100,000=10\times10,000$. כיוון שהשארית של 10,000 בחילוק ל-11 היא 1, השארית של 100,000 בחילוק ל-11 היא 10. (אפשר לכוון את התלמידים להכליל את המסקנה לכל חזקת 10 שאיננה חזקת 100.)

ז. 4,215=4,200+15 לכן השארית שווה לשארית של 42+15 – השארית היא 2.

135,892=130,000+5,800+92 לכן השארית שווה לשארית של 13+58+92 – השארית היא 9.

ח. בשלב זה ייתכן שהתלמידים יוכלו בעצמם לנסח את הכלל: אם נחלק את הספרות של המספר לזוגות מימין לשמאל ונסכם את המספרים הדו-ספרתיים שנקבל (והמספר החד-ספרתי שאולי יתקבל משמאל) – שארית החילוק של המספר שיתקבל שווה לשארית החילוק של המספר הראשון. אפשר לחזור על התהליך עד שיתקבל מספר קטן מ-11.
כדאי לקשר בין הכלל הזה לכלל של מציאת שארית החילוק ב-9.