תמונות ומסכים – מדריך למורה

משך הפרק: 4 שעות

נקודת המוצא של הפרק היא דמיון מלבנים, המוצג באמצעות מכשירים אלקטרוניים מחיי היומיום של התלמידים. האילוצים שמתווה דמיון המלבנים (הדמיון בין תמונות הסרט המופיעות על מסכים שונים) אנו מגיעים לסיטואציות מתמטיות מורכבות. בתחילה מוצגות בעיות בתחום המספרים ומאוחר יותר בתחום האלגברי, באופן המקשר בין גאומטריה, מספרים, ואלגברה.

1. בשאלה התמונות מהוות מלבנים דומים.

א. ישנן שתי גישות. אם רואים את היחס מוגדר כ"לכל 4 פיקסלים ברוחב יש 3 פיקסלים בגובה" הרי שמספר ה"רביעיות" ברוחב הוא 720/4=180 והו גם מספר השךישיות ברוחב, ולכן מספר הפיקסלים ברוחב הוא 180·3=540.
פירוש אחר ליחס הוא שהרוחב גדול פי 4/3 מהגובה, ולכן מספר הפיקסלים בגובה הוא 540 = (4/3)/720.

ב. גם כאן ניתן לבחור באחת משתי הגישות לעיל, או בכל גישה או פירוש אחר לסיטואציה שיעלו התלמידים. רוחב התמונה על המרקע הוא 68 ס"מ.

ג. באופן דומה, גובה התמונה יהיה 1.125 = 9/8 מטר.

ד. רוחב וגובה התמונה המקורית הם 720x540. לא ניתן לשמור על אותו יחס בין הגובה לרוחב ולהקטין את התמונה **בדיוק** פי 10. כדאי לתת לתלמידים להתנסות ולהגיע למסקנה זו בעצמם. יש לבקש מהם לנמק מדוע. נימוק לדוגמה (יש עוד רבים אפשריים): כדאי להקטין את התמונה בדיוק ב-10 יש לחלק את האורך והרוחב באותו מספר, כלומר ב- $\sqrt{10}$, אבל אז יתקבל מספר לא שלם של פיקסלים באורך וברוחב, וזה בלתי-אפשרי, שכן הפיקסל היא יחידה שאינה-ניתנת-לחלוקה בתמונה דיגיטלית.

בקשו מהתלמידים להקטין את התמונה באופן שישמור על היחס בין גובהה ורוחבה , ויקטין את מספר הפיקסלים לפחות פי 10. הצעה אפשרית היא להקטין את הגוב והרוחב פי 4. באופן כזה התמונה תקטן פי 16, ואיכותה תרד. כוונו את התלמידים להגיע יותר קרוב ל-10.

אחת הדרכים למצוא פיתרון אופטימלי היא למצוא את הגורם המשותף הגדול ביותר של 720 ו-540. גורם זה הוא 180. מכאן – חלוקה של כל אחד ממספרים אלו בשבר שהמונה שלו הוא 180 תיתן מספר שלם. נמצא את השבר מצורה זו הקרוב ביותר מלמעלה ל- $\sqrt{10}$: נחשב את $\frac{180}{\sqrt{10}}=56.921\ldots$ ונעגל כלפי מטה כדי לקבל את המונה של שבר זה. אם נחלק את הרוחב והגובה ב- $\frac{180}{56}$ הגובה והרוחב יקטנו פי $\left(\frac{180}{56}\right)^2=10.3316\ldots$ ונקבל תמונה של 224x168 פיקסלים.

יש לתת לתלמידים לחקור דרכים שונות. יתכן שהפיתרון האופטימלי שהצגנו כאן לא יועלה על-ידי התלמידים, ויש לקבל כתשובה נכונה כל שיפור שלהם לדרך הנאיבית של הקטנת התמונה פי 16.

ה. לפני סעיף **ה** יש תזכורת להגדרה של מלבנים דומים בחומר הלימוד. ההגדרה מדברת על היחס בין צלעות מתאימות, בעוד הדרישה שהובאה בשאלה היא על שימור היחסים בין הצלעות באותו מלבן. כי המלבנים בסעיפים **ג וד** הם דומים – ניתן לעשות זאת על-ידי חישוב פשוט.

המורה יכול להרחיב את השאלה ולבקש להוכיח כי כל שני מלבנים שהיחס בין צלעות סמוכות שלהם זהה הם דומים. נראה כאן שתי הוכחות אפשריות לטענה זו.

הוכחה אלגברית: אם מידות המלבן הראשון הן $a\times b$ ומידות המלבן השני הן $c\times d$ הרי שלפי הדרישה בשאלה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. אם נכפיל את האגפים ב-b ונחלק ב-c נקבל $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ - כלומר נקבל כי המלבנים דומים על פי הגדרת הדמיון.

הוכחה אלגוריתמית: כדי לעבור ממלבן אחד למלבן אחר שהיחס בין צלעותיו זהה, יש להכפיל את האורך והרוחב של המלבן המקורי באותו מספר, ומספר זה יהיה היחס גם בין האורכים וגם בין רוחבי שני המלבנים – החדש והישן.

2. א. כדי לקבל את היחס בצורתו המצומצמת נחלק את אורך ורוחב התמונה במכנה המשותף הגדול ביותר, 45, ונקבל 16/9. כמובן שניתן לקבל את היחס המצומצם בדרכים אחרות, כמו צמצומים חוזרים של השבר 720/405.

ב. הדרך דומה לשאלה הקודמת. גובה התמונה הוא $32\Big/\frac{9}{8}=28\frac{4}{9}$ מטרים. שימו לב שלא התקבל מספר שלם. בניגוד לאמור לגבי פיקסלים, אין סיבה להניח שבגובה התמונה יכנס מספר שלם של מטרים.

ג. המצב כאן רלוונטי להמשך הפעילות ולכן כדאי להבהיר אותו: מספר הפיקסלים במסך קטן יותר ממספר הפיקסלים של התמונה בקובץ, ולכן על המכשיר להקטין את התמונה בהתאם.

יש דרכים שונות לפתור את השאלה. אנו נסתמך על כך שתמונות מהוות מלבנים דומים. היחס בין רוחבי התמונות הוא 3 = 720/240 ולכן זהו גם היחס בין גובהן. גובה התמונה בטלפון הוא 135 = 405/3 פיקסלים.

בשלב זה מוצגת בפעילות סיטואציה עליה מושתתות פעילויות 3-8. שאלות 3-6 מאפשרות לתלמידים היכרות עם הסיטואציה והבחנה ביחס בין הגדלים השונים הקיימים בה: גובה המסך, מימדי התמונה ומימדי "השטח השחור". ניתן להחליף את השאלות או להקדים להן דיון בכיתה או בקבוצות, בו התלמידים יעלו רעיונות שונים בקשר ליחסים בין הגדלים, ושאלות לגביהן. ניתן גם "לסטות" מהפעילות המותווית כאן, ולחקור את השאלות שהתלמידים יעלו.

3. א. התמונה תהיה מוגבלת על-ידי רוחב המסך שהוא "1 וכיוון שהיא ריבועית מימדיה יהיו "1"x1, כלומר, 1 אינץ' ריבועי (א"ר), כאשר הטלפון "עומד". השטח השחור הנותר יהיה בגודל 2 א"ר. כיוון שהתמונה ריבועית יהיו לה אותם מימדים אם נסובב אותה, ולכן שטח התמונה וגודל השטח השחור יהיו זהים כאשר הטלפון עומד וכאשר הוא שוכב.

ב. במקרה זה מימדי התמונה מוגבלים על-ידי גובה המסך, ושטחו יהיה 0.16=0.4x0.4 א"ר. השטח הנותר – השחור – הוא 0.24=0.6x0.4 א"ר.

ג. הדבר יקרה כאשר המסך ריבועי – כלומר כאשר גובה המסך הוא "1.

ד. הקשר בין גובה המסך לשטח התמונה מתואר על-ידי פונקציה בתחום מפוצל. אם פונקציות מסוג זה אינן מוכרות לתלמידים, יתכן והם יתקשו לנסח את הקשר. ניתן לכוון אותם לנסח את כלל ההתאמה באופן מילולי, ולסרטט את הגרף על-ידי נקודות מתאימות. כלל ההתאמה הוא

$$y=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

אך אין צורך לדרוש מהתלמידים לנסחו בצורה זו. ניסוח מילולי או כל ניסוח בהיר אחר יכול להתקבל. התלמידים יוכלו לסרטט את הקטע הליניארי. את העקומה בקטע (0,1) הם יסרטטו על-ידי ציור נקודות על הגרף על-פי חישובים מספריים.

בקשו מהתלמידים להסביר מה קורה בנקודה x=1 מבחינת הסיטואציה.

4. א. המסכים של רות ומיקי מהווים מלבנים דומים. כיוון שרוחב המסך של שניהם הוא "1 המלבנים יכלו להיות חופפים, אך נתון כי המסכים אינם באותו גודל. יש לתת לתלמידים למצוא ולהסביר כיצד זה יתכן.

הסבר אפשרי הוא שהרוחב המסך בטלפון של מיקי מתאים לגובה המסך בטלפון של רות, והיחס ביניהם הוא 1:2. לכן זהו גם היחס בין גובה המסך בטלפון של מיקי לרוחב המסך של רות שהוא "1. מכאן גובה המסך בטלפון של מיקי הוא "0.5.

ב. גובה התמונה בטלפון של רות הוא "2 ורוחבה "1. בטלפון של מיקי התמונה מוגבלת על-ידי גובה המסך – "0.5. גובה התמונה גדול פי 2 מרוחבה, ולכן רוחב התמונה יהיה "0.25.

ג. במצב עומד רוחב התמונה הוא "0.25 מתוך רוחב מסך של "1. רוחב השטח השחור יהיה "0.75 וגובהו כגובה המסך - "0.5.

כאשר הטלפון של מיקי במצב שוכב, התמונה תיכנס בדיוק במסך (כפי שהיא נכנסה במסך של רות – הרי המסכים מהווים מלבנים דומים), ולא יהיה שטח שחור במסך.

בשלב זה מוצג בפעילות יישומון המתאר את הסיטואציה ומייצג את גובה ורוחב הטח השחור מספרית ובגרף. את שאלות 5-7 ו-8א,ב ניתן לפתור על-ידי גרירה ביישומון. יש

לאפשר לתלמידים לעשות זאת, על מנת שיקבלו הבנה ותחושה לגבי הסיטואציה על ייצוגיה.

5. א. האיור הימני.

ב. התמונות בשני המכשירים מהוות מלבנים דומים. היחס בין רוחבי התמונות הוא 1:1.5, או 2:3, וזהו גם היחס בין גובהן. גובה התמונה בטלפון השוכב הוא "1 ולכן גובה התמונה כאשר הטלפון עומד הוא 2/3 אינץ'.

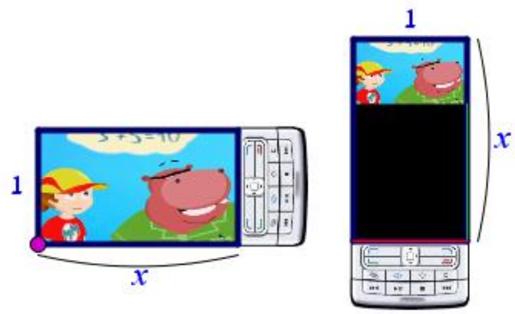
ג. רוחב השטח השחור: "1 (ראו ציור בתרגיל) וגובהו $\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=1\frac{1}{6}$ אינץ'.

6. א. האיור השמאלי.

ב. גובה התמונה היה "1 כאשר הטלפון שכב. כאשר הטלפון עומד התמונה תמלא את כל המסך לגובה, וגובהה יהיה "0.4. היחס בין רוחב התמונה לגובהה הוא 0.4:1 או 2:5. רוחב התמונה כאשר הטלפון עומד הוא $0.4\cdot\frac{2}{5}=0.4\cdot0.4=0.16$ אינץ'.

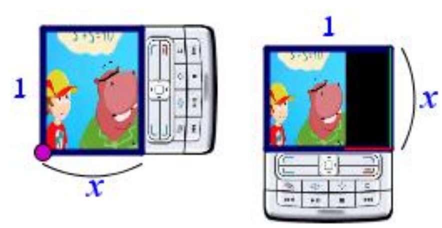
7. השאלה מתייחסת למצב המתואר ביישומון. ביישומון ניתן להציג במערכת צירים את גובה ורוחב המסך לערכים שונים של גובה המסך – המשתנה x בשאלה. על מנת לצייר את הגרפים המתקבלים לחצו על "הפעלת עקבות".

א. המצב $x>1$ מתואר על-ידי הציור הבא (המועתק מתוק הסרטוט הדינמי ביישומון):



היחס בין הגובה לרוחב התמונה בטלפון השוכב הוא x:1. בטלפון העומד רוחב התמונה הוא "1 והוא גדול מגובה התמונה פי x. מכאן גובה התמונה הוא $\frac{1}{x}$, וגובה השטח השחור הוא $x-\frac{1}{x}$. רוחב השטח השחור הוא "1.

המצב כאשר $x<1$ נראה כך:



גם כאן בטלפון השוכב היחס בין רוחב התמונה לגובהה הוא x:1. גובה התמונה בטלפון העומד הוא "x. כדי למצוא את הרוחב יש תכפול את הגובה ב-x ולכן רוחב התמונה יהיה x^2. רוחב השטח השחור יהיה $1-x^2$, וגובהו x.

ב. גובה השטח השחור מתאפס כאשר x=0 כמובן. כאשר $x>1$ גובה השטח השחור נתון על-ידי $x-\frac{1}{x}$. ביטוי זה מתאפס רק כאשר x=1 (ערכי x חיוביים בבעיה

הנתונה. פיתרון זה אינו טרוויאלי עבור התלמידים, וכך לא הטענה שזהו פיתרון יחיד. ניתן לערוך דיון בכיתה בסוגיות אלו, ומהלכו לחקור את התכונות של x ושל $1/x$ מספרית ובאמצעות הגרפים שלהם.

רוחב השטח השחור נשאר קבוע כאשר $x>1$ ונתון על-ידי $1-x^2$ עבור $x<1$. גם ביטוי זה מתאפס רק ב $x=1$ (בתחום החיובי).

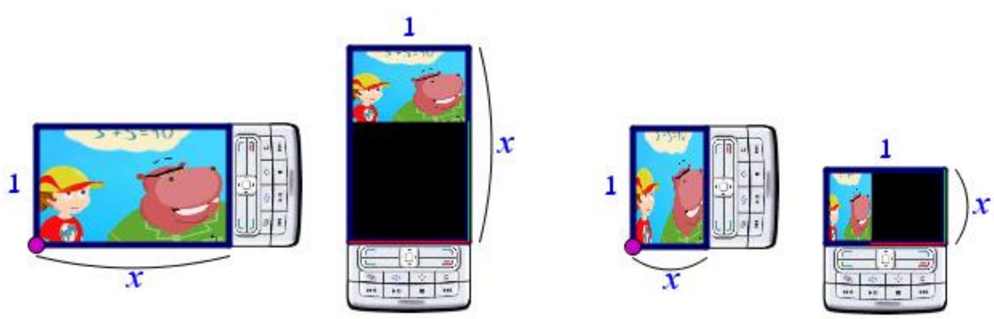
ניתן לשלב את החקירה בהתבוננות בהתנהגות הביטויים סביב $x=1$ ביישומון. כאשר אנו מציירים את עקבות הגובה והרוחב יחדיו על אותה מערכת צירים, אנו מוצאים כי לשני המימדים יש אי-רציפות ב $x=1$, בה גרפים מתחלפים – כל אחד ממשיך את השני. בקשו מהתלמידים להסביר את התנהגות הגרפים על-פי תכונות הביטויים האלגבריים.

8. בשאלה זו אנו בוחנים שני מצבים מסוימים מתוך מרחב המצבים של הבעיה – המצבים בהם השטח השחור הוא ריבועי. נמצא מה מייחד מצבים אלו ומה משותף להם, ונגלה דרכם פנים מסוימים של יחס הזהב.

א. בעזרת היישומון ניתן למצוא שני ערכים בהם רוחב השטח השחור שווה לגובהו. בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה, מצבים אלו הם כאשר $x=1.62$ וכאשר $x=0.62$.

ב. ההפרש בין ערכים אלו הוא בקירוב 1. (למעשה, הוא בדיוק 1, אך התלמידים לא יכולים לדעת זאת בשלב זה).

ג. אלו הם שני המקרים, כפי שהם מוצגים ביישומון:

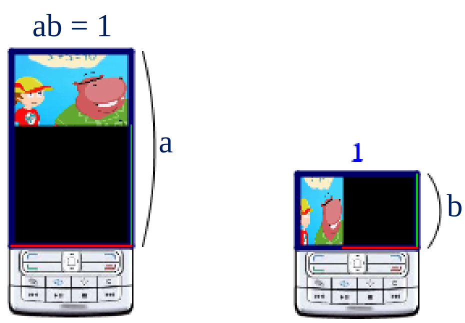


התמנות המוקפות באדום נראות כמלבנים חופפים. רוחב המלבן משמאל וגובה המלבן מימין שווים שניהם ל-x אינצ'ים. אם אכן ההפרש בין ערכי x בשני המקרים הוא 1, אזי גובה המלבן משמאל שווה לרוחב המלבן מימין, והמלבנים אכן חופפים.

כיוון שהתמונה בטלפון העומד משמאל מהווה מלבן הדומה למסך הטלפון, הרי ששני מסכי הטלפונים בשני המקרים מהווים מלבנים דומים.

התלמידים יכולים להגיע לקשר זה בדרכים אחרות, למשל על-ידי חישוב מספרי של היחסים בין מימדי המסכים בשני המקרים. בחקירה שלהם הם יכולים להתקל גם בקשרים שונים בין ערכי x שמצאו, לדוגמא: שהם מהווים מספרים הופכיים .

למעשה, ניתן להוכיח שאלו מספרים הופכיים בדרך גאומטרית. נסמן את ערכי x שמצאנו ב-a ו-b, כך ש a>b. אם נגדיל את צלעות הטלפון העומד מימין פי a נקבל את ציור הטלפון העומד משמאל: הריבוע נשאר ריבוע, והתמונה והמסך מהווים מלבנים דומים. המימד הקטן של מלבןהמסך המתקבל מההגדלה הוא ab, אך אנו יודעים כי המימד הקטן של המסך בטלפון משמאל הוא 1, ולכן ab=1.



ד. ישנם שני מצבים בהם השטח השחור הוא ריבועי:

כאשר x>1 השוויון בין גובה ורוחב השטח השחור מתקיים כאשר $x-\frac{1}{x}=1$.

כאשר x<1, השוויון מתקיים כאשר $x=1-x^2$.

מטרת הסעיף היא לנסח משוואות על מנת לבדוק באופן מדויק את הפיתרונות המוצעים בסעיפים הבאים. אם בכל זאת יהיו תלמידים ישחקו עם המשוואות יתכן והם יגלו כי הנגדי של כל פיתרון של אחת מהן הוא פיתרון של השנייה (אם

התלמידים לא חוקרים בכיוון זה, אין צורך להצביע על כך בכיתה. עובדה זו לא נחוצה להמשך הפעילות).

ה. העבודה כאן היא טכנית, אך דורשת מחשבה, מכיוון שהתלמידים אינם מורגלים בעבודה כגון זו.

ו. כמו סעיף **ה**.

ז. ההגדרה של מלבנים דומים אומרת כי היחסים בין צלעות מתאימות הם שווים. דרך אחת להוכיח את הדמיון פירטנו כאן בסעיף ג: להגדיל את צלעות המלבן הקטן פי φ ולהוכיח כי מתקבל המלבן הגדול.

ניתן לבצע זאת גם בדרך אלגברית: הצלע הארוכה של הלבן הגדול אורכה φ והצלע הגדולה של המלבן הקטן אורכה 1 (כל האורכים באינצ'ים). הצלעות הקצרות של המלבנים אורכן 1 ו-φ בהתאמה. אנו צריכים להוכיח כי $\frac{1}{\varphi-1}=\frac{\varphi}{1}$. על-ידי פעולות על אגפים נקבל כי משוואה זו שקולה לשוויון $\varphi-\frac{1}{\varphi}=1$ - שידוע לנו (מסעיף **ה**) כי הוא מתקיים.

9. המלבנים בשאלה דומים למלבנים בבעיית הטלפון מהשאלה. ההבדל המרכזי הוא שכאן לא נתונות מידות המלבנים, אלא רק היחס בין צלעותיהם. אורך הצלע הקצרה (באינצ'ים) של המלבן הגדול מסומן ב-a (בשאלה 8 "a=1). על מנת להוכיח דמיון מספיק להראות כי שני המלבנים בסרטוט דומים למסכי הטלפון בשאלה הקודמת (שהוכחנו כי הם דומים אחד לשני). כל צלע במלבן הגדול כאן גדולה פי a מהצלע המתאימה במסך הגדול, וכך גם לגבי המלבן הקטן כאן והמסך הקטן.

דרך אחרת היא להוכיח את יחס הדמיון באופן אלגברי. היחס בין אורכי צעות מתאימות הוא $\frac{a}{a\varphi-a}=\frac{a\varphi}{a}$. משוואה זו שקולה לשוויון $\frac{1}{\varphi-1}=\frac{\varphi}{1}$ שידוע כי הוא נכון מהשאלה הקודמת. שימו לב כי a מצטמצם במשוואת הדמיון, ולכן יחס הדמיון הוא φ ואינו תלוי ב-a.

.01__

א. לפי שאלה 9 יחס הדמיון בין המלבן הראשון לשני הוא φ, וזהו גם יחס הדמיון בין המלבן השני לשלישי, וכן הלאה. הצלע הארוכה במלבן הראשון גדולה פי φ מהצלע הארוכה במלבן השני, וזו גדולה פי φ מהצלע הארוכה במלבן השלישי. לכן הצלע הארוכה במלבן הראשון תהיה גדולה פי φ^2 מהצלע הארוכה של המלבן השלישי, ובאותו אופן היא תהיה גדולה פי φ^3 מהצלע הארוכה של המלבן הרביעי.

ב. שתי צלעותיו של המלבן הרביעי קטנות פי φ^3 מהצלעות המתאימות במלבן הראשון. מכאן ששטחו של המלבן הראשון גדול פי $\varphi^3 \cdot \varphi^3 = \varphi^6$ משטחו של המלבן הרביעי.

באופן אלגברי מפורש: נסמן את צלעות המלבן הראשון ב-a ו-b. אורך צלעות המלבן הרביעי יהיו $\frac{a}{\varphi^3}$ ו- $\frac{b}{\varphi^3}$. שטחי המלבנים יהיו ab ו- $\frac{ab}{\varphi^6}$ בהתאמה.

ג. אורך צלע המלבן ה-n תהיה קטנה מאורך צלע המלבן הראשון פי φ^{n-1} ובדרך דומה לזו שפירטנו בסעיף ב נקבל כי שטח המלבן ה-n קטן פי φ^{2n-2} משטח המלבן הראשון.